§12. Determinante de una matriz

Def: Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(k)$ matriz cuadrada. Definimos el determinante de A denotado $\det(A)$ o $|A|$, por:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

En otras palabras, $\det(A)$ es el determinante de los vectores columnas de A, i.e., es el determinante de todo endomorfismo u tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ para cierta base $\mathcal{B}$.

Ejemplos:

1) $\det(I_n) = 1$ y $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$ para $\lambda \in k$.

2) $\boxed{n=2}$ Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3) $\boxed{n=3}$ Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $S_3 = \{\underset{\varepsilon=1}{id}, \underset{\varepsilon=-1}{(1,2)}, \underset{\varepsilon=-1}{(2,3)}, \underset{\varepsilon=-1}{(1,3)}, \underset{\varepsilon=1}{(2,3,1)}, \underset{\varepsilon=1}{(3,1,2)}\}$

$\Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$.

4) Como $\mathrm{card}(S_n) = n!$, si $A \in M_n(k)$ entonces $\det(A)$ tiene $n!$ términos !

Prop: Sea $A \in M_n(k)$. Entonces, $\det(A) = \det({}^tA)$.

Dem: Sea $A = (a_{ij})$ y ${}^tA = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ji}$. Luego, para $\sigma \in S_n$ tenemos

$$\varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)1} = \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma^{-1})\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n},$$

donde la última igualdad se deduce de $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ y de $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$ pues σ es una biyección. Luego:

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$\underset{\substack{\text{cambio de variable} \\ \tau = \sigma^{-1}}}{=} \sum_{\tau^{-1} \in S_n} \varepsilon(\tau)\, a_{\tau(1)1} \cdots a_{\tau(n)n} \underset{S_n \text{ es un grupo}}{=} \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau)\, a_{\tau(1)1} \cdots a_{\tau(n)n}$$

$$= \det(A) \quad \blacksquare$$

Teorema (propiedades del determinante): Sea $A \in M_n(k)$. Entonces:

1. $\det(A)$ depende linealmente de cada fila y cada columna.
2. $\det(A) = 0$ si dos filas o si dos columnas son iguales.
3. $\det(A)$ no cambia si adicionamos a una fila, o a una columna, una combinación lineal de las otras.
4. $\det(A)$ cambia de signo si intercambiamos dos filas o dos columnas.

Dem: Si consideramos $u: k^n \to k^n$ la aplicación lineal asociada a A, entonces $\det(u) = \det(A)$ y todas las afirmaciones respecto a las columnas se obtienen directamente. Las afirmaciones respecto a las filas se obtienen a considerar ${}^tA$ y se deducen de la Proposición anterior. $\blacksquare$

Teorema: Sean $A, B \in M_n(k)$. Entonces:

① $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

② A es invertible (ie, $A \in GL_n(k)$) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Más aún, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dem: Sea $u : k^n \to k^n$ (resp. $v : k^n \to k^n$) el endomorfismo asociado a A (resp. B). Entonces, $\det(u) = \det(A)$ y $\det(v) = \det(B)$. Dado que AB es la matriz asociada a $u \circ v$, tenemos:

$$\det(AB) = \det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(A)\det(B),$$

de donde se tiene ①. El punto ② se deduce de $\det(u) = \det(A)$ y del hecho que la matriz asociada a u^{-1} es A^{-1} ■

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(k)$ tq $\det(A) = ad - bc \neq 0$ (ie, $A \in GL_2(k)$). Un cálculo directo permite verificar que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Recuerdo: Dos matrices $A, B \in M_n(k)$ son *semejantes* si $\exists P \in GL_n(k)$ tal que $P^{-1}AP = B$, ie, A y B representan (en diferentes bases) el mismo endomorfismo $u : k^n \to k^n$.

Corolario: Si $A, B \in M_n(k)$ son semejantes, entonces $\det(A) = \det(B)$.

Dem: Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de k^n tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ y $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ para cierto endomorfismo $u : k^n \to k^n$. Entonces, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ y $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$:

$$\det(u) = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))}_{\det(A)} \underset{\substack{\text{Teorema} \\ \text{de §11}}}{=} \underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(u(e_1'), \dots, u(e_n'))}_{\det(B)} \checkmark$$

Alternativamente, si $P^{-1}AP = B$ con $P \in GL_n(k)$, entonces

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \underbrace{\det(P^{-1})}_{1/\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A) \checkmark$$ ■

Importante: La función $\det : M_n(k) \to k$ <u>no</u> es lineal:
En general, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. Además, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ para todo $\lambda \in k$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A \in M_n(k)$. Decimos que A es *antisimétrica* si ${}^tA = -A$. Sea $A \in M_n(k)$ matriz antisimétrica, probar que A <u>no</u> es invertible si n es impar.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea V un $\mathbb{R}$-e.v. de $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Una *estructura compleja* en V es un endomorfismo $J : V \to V$ tq $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Probar que si V posee una estructura compleja J entonces necesariamente n es par, y además $J \in GL(V)$.