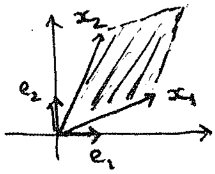
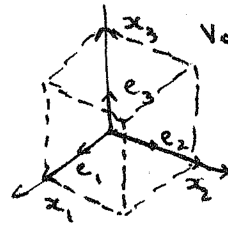
Interpretación geométrica: Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ vectores. Entonces el valor absoluto del determinante, $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)|$ es el volumen del paralelepípedo n-dimensional construido a partir de $x_1, \dots, x_n$.

$\boxed{n=2}$



Área $= |\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)|$

$\boxed{n=3}$

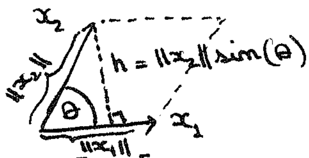


Volumen $= |\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)|$

En particular, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow$ los $x_1, \dots, x_n$ son l.d. (el paralelepípedo es "plano").

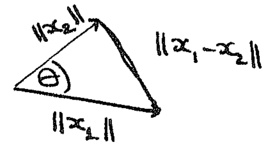
Idea $(n=2)$: Si $x_1 = (a,b)$ y $x_2 = (c,d)$ entonces:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)^2 = (ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2$$
$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (x_1 \cdot x_2)^2$$



$\theta \in [0, \pi[$

Por otra parte (teorema del coseno):



$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_1\| \|x_2\| \cos(\theta)$$
$$\|x_1 - x_2\|^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2) = x_1 \cdot x_1 - 2(x_1 \cdot x_2) + x_2 \cdot x_2$$
$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$$

$\Rightarrow (x_1 \cdot x_2) = \|x_1\| \|x_2\| \cos(\theta)$.

Luego, $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)| = \sqrt{\|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2(\theta))} = \|x_1\| \|x_2\| \sin(\theta) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \|x_1\| h\right)$ ∎

§11. Determinante de un endomorfismo

Sea V un k-e.v. de $\dim_k(V) = n$.

Teorema: Sea $u : V \to V$ un endomorfismo.

① Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Entonces, el escalar $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ no depende de la elección de $\mathcal{B}$; dicho escalar es denotado $\det(u)$ y es llamado el determinante de u.

② Para todos $x_1, \dots, x_n \in V$ y toda base $\mathcal{B}$ de V, tenemos:
$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Dem: Para toda base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V, escribamos $d(\mathcal{B}) := \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Dado que u es lineal y $\det_{\mathcal{B}}$ multilineal alternada, la composición
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$$
es n-multilineal alternada. Luego, el lema de §10 implica que
$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = d(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n). \quad (*)$$

Por ende, basta probar que $d(\mathcal{B})$ es independiente de $\mathcal{B}$: Sea $\mathcal{B}'$ otra base y sea $\lambda := \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n)$. El Teorema de §10 nos da, aplicado a $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$:
$$1 = \det_{\mathcal{B}'}(e_1', \dots, e_n') = \lambda \det_{\mathcal{B}}(e_1', \dots, e_n') \quad (**)$$

y $$d(\mathcal{B}') \underset{\text{definición}}{=} \det_{\mathcal{B}'}(u(e_1'), \dots, u(e_n')) \underset{\text{Teo §10}}{=} \lambda \det_{\mathcal{B}}(u(e_1'), \dots, u(e_n')) \underset{(*)}{=} \lambda d(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(e_1', \dots, e_n') \underset{(**)}{=} d(\mathcal{B})$$ ∎

Ejemplo: Una homotecia es un endomorfismo de la forma $h_\lambda : V \to V$, $x \mapsto \lambda x$, donde $\lambda \in k$ es llamado el factor de la homotecia.

Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V, entonces:

$$\det(h_\lambda) = \det_{\mathcal{B}}(h_\lambda(e_1), \dots, h_\lambda(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1, \lambda e_2, \dots, \lambda e_n) \underset{\det_{\mathcal{B}} \text{ multilineal}}{=} \lambda^n \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(h_\lambda) = \lambda^n}$$

Teorema: Sean $u, v \in \mathrm{End}_k(V)$ dos endomorfismos.

① $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(v \circ u)$

② u es un automorfismo (i.e, $u \in GL(V)$) $\Leftrightarrow \det(u) \neq 0$. Más aún, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Dem: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Entonces:

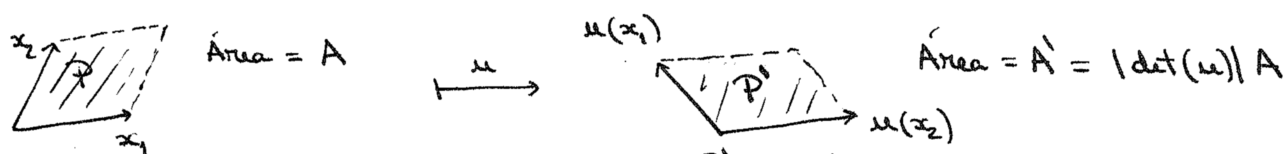
$$\det(u \circ v) = \det_{\mathcal{B}}(u(v(e_1)), \dots, u(v(e_n))) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \det(u)\det(v)$$

de donde obtenemos ①.

Para que u sea biyectivo, es necesario y suficiente que $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ sea una base de V. Por definición, $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$. Por otro lado, el Teorema de §10 nos dice que $\det(u) \neq 0 \Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ es una base. Finalmente, $u \circ u^{-1} = id_V$ implica que $\det(u)\det(u^{-1}) = \det(id_V) = 1$, gracias a ① ■

Interpretación geométrica: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Entonces, $|\det(u)|$ es el volumen del paralelepípedo construido a partir de $u(e_1), \dots, u(e_n)$. El primer Teorema de esta sección dice que si consideramos la imagen de un paralelepípedo por u, su volumen se amplifica por $|\det(u)|$.

$\boxed{n=2}$



$P' = u(P)$

⚠ Esto será muy útil para calcular integrales múltiples

Importante: La función $\det : \mathrm{End}_k(V) \to k$ no es lineal:

En general, $\det(u+v) \neq \det(u) + \det(v)$. Además, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ para $\lambda \in k$ (pues $\lambda u = h_\lambda \circ u \Rightarrow \det(\lambda u) = \det(h_\lambda \circ u) = \underbrace{\det(h_\lambda)}_{\lambda^n}\det(u)$).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Diremos que un endomorfismo $u : V \to V$ es de orden m si $u^m = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{m\text{-veces}}$ es igual a id_V. Probar que si $u \in \mathrm{End}_k(V)$ tiene orden m entonces $\det(u) \in k$ es una raíz m-ésima de 1, y deducir que $u \in GL(V)$.