§10. Determinantes

Sea V un k-e.v. de $\dim_k(V) = n$ y $\mathcal{F}$ una forma n-multilineal alternada.
Objetivo: Nos gustaría "expandir" $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ como en el ejemplo de $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V y escribamos $x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} e_i$.
Por multilinealidad, tenemos que:

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}\left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n x_{i_n n} e_{i_n} \right)$$

$$= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_n \le n} x_{i_1 1} x_{i_2 2} \cdots x_{i_n n} \mathcal{F}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

Dado que $\mathcal{F}$ es alternada, los términos donde índices $i_1, \dots, i_n$ son los mismos se anulan. Luego, los únicos términos que quedan son aquellos en que todos los índices son distintos, i.e., para los cuales la aplicación $k \mapsto i_k$ es inyectiva, y por ende una permutación $\sigma \in S_n$. Así,

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \mathcal{F}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

$$\underset{\text{Prop. anterior}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) \mathcal{F}(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \mathcal{F}(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}.$$

Def: Sean V un k-e.v. de $\dim_k(V) = n$ y $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Definimos el determinante de los vectores $x_1, \dots, x_n \in V$ en la base $\mathcal{B}$ como

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n},$$

donde $x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} e_i$ para $j = 1, \dots, n$.

Luego, la discusión anterior puede resumirse en:

Lema: Sea V un k-e.v. de $\dim_k(V) = n$ y sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Entonces para toda forma n-multilineal alternada $\mathcal{F}$ se tiene que

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

En otras palabras, todas las formas n-multilineales alternadas sobre V son proporcionales a $\det_{\mathcal{B}}: V^n \to k$. ∎

Ejemplo: Sea $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ la base canónica de k^2, entonces:

$$\det_{\mathcal{B}}\big(\underbrace{(x_{11}, x_{21})}_{x_1 \in k^2}, \underbrace{(x_{12}, x_{22})}_{x_2 \in k^2}\big) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}.$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de k^3. Calcular $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$.

<u>Prop</u>: La aplicación $\det_{\mathcal{B}}: V^n \to k$ es una forma n-multilineal alternada que cumple $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

<u>Dem</u>: Notar que cada una de las expresiones $\varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}$ que intervienen en la definición de $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ es n-multilineal en $(x_1, \dots, x_n)$ y luego su suma, $\det_{\mathcal{B}}$, lo es también. Veamos que es alternada:

Sea $\tau = (i, j)$ y consideremos $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ésima} \\ \text{posición}}}{x_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ésima} \\ \text{posición}}}{x_i}, \dots, x_n)$ que vale:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(i)j} \cdots x_{\sigma(j)i} \cdots x_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma\circ\tau(1)1} \cdots x_{\sigma\circ\tau(j)j} \cdots x_{\sigma\circ\tau(i)i} \cdots x_{\sigma\circ\tau(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} -\varepsilon(\sigma\circ\tau)\, x_{\sigma\circ\tau(1)1} \cdots x_{\sigma\circ\tau(n)n} = -\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

y luego $\det_{\mathcal{B}}: V^n \to k$ es alternada. Finalmente, si $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$ entonces $x_{ij} = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$. Así, el término $x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}$ es no-nulo sólo si $\sigma(i) = i \ \forall i$, o sea, $\sigma = id \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ ■

<u>Teorema</u>: Sea $\mathcal{B}$ una base de un k-e.v. V de dimensión n. Luego:

1. $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ es lineal en cada x_i.
2. $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ si dos de los x_i son iguales.
3. Para toda $\sigma \in S_n$ se tiene $\det_{\mathcal{B}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
   En part, el determinante cambia de signo si intercambiamos dos de los x_i.
4. $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ no cambia cuando adicionamos a un x_i una combinación lineal de los otros.
5. Si $\mathcal{B}'$ es otra base de V, entonces
   $$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$
6. $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \dots, x_n)$ es una base de V.

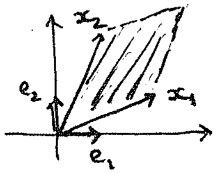
<u>Dem</u>: ① y ② son la definición de una aplicación multilineal alternada. ③ y ④ fueron probados en §9. El punto ⑤ sigue del Lema anterior aplicado a $F = \det_{\mathcal{B}'}$. Veamos ⑥: Si $(x_1, \dots, x_n)$ es una base $\mathcal{B}'$, entonces ⑤ da:

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)}_{=1} = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Recíprocamente, si los vectores $x_1, \dots, x_n$ son l.d., entonces $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ pues $\det_{\mathcal{B}}$ es multilineal alternada ■

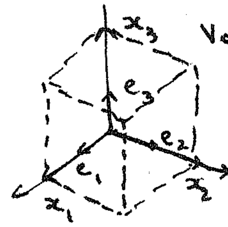
Interpretación geométrica: Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ vectores. Entonces el valor absoluto del determinante, $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)|$ es el volumen del paralelepípedo n-dimensional construido a partir de $x_1, \dots, x_n$.

$\boxed{n=2}$



Área $= |\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)|$

$\boxed{n=3}$

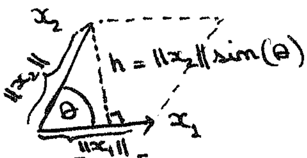


Volumen $= |\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)|$

En particular, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow$ los $x_1, \dots, x_n$ son l.d. (el paralelepípedo es "plano").

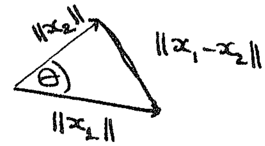
Idea ($n=2$): Si $x_1 = (a,b)$ y $x_2 = (c,d)$ entonces:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)^2 = (ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2$$
$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (x_1 \cdot x_2)^2$$



$\theta \in [0, \pi[$

Por otra parte (teorema del coseno):



$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_1\|\,\|x_2\| \cos(\theta)$$
$$\|x_1 - x_2\|^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2) = x_1 \cdot x_1 - 2(x_1 \cdot x_2) + x_2 \cdot x_2$$
$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$$

$\Rightarrow (x_1 \cdot x_2) = \|x_1\|\,\|x_2\| \cos(\theta)$.

Luego, $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)| = \sqrt{\|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2(\theta))} = \|x_1\|\,\|x_2\| \sin(\theta) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\|x_1\| h\right)$ ∎

§11. Determinante de un endomorfismo

Sea V un $\mathbb{k}$-e.v. de $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n$.

Teorema: Sea $u : V \to V$ un endomorfismo.

① Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Entonces, el escalar $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ no depende de la elección de $\mathcal{B}$; dicho escalar es denotado $\det(u)$ y es llamado el determinante de u.

② Para todos $x_1, \dots, x_n \in V$ y toda base $\mathcal{B}$ de V, tenemos:
$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Dem: Para toda base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V, escribamos $d(\mathcal{B}) := \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.
Dado que u es lineal y $\det_{\mathcal{B}}$ multilineal alternada, la composición
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$$
es n-multilineal alternada. Luego, el lema de §10 implica que
$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = d(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n). \quad (*)$$
Por ende, basta probar que $d(\mathcal{B})$ es independiente de $\mathcal{B}$: Sea $\mathcal{B}'$ otra base y sea $\lambda := \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n)$. El Teorema de §10 nos da, aplicado a $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$:
$$1 = \det_{\mathcal{B}'}(e_1', \dots, e_n') = \lambda \det_{\mathcal{B}}(e_1', \dots, e_n') \quad (**)$$
y
$$d(\mathcal{B}') \underset{\text{definición}}{=} \det_{\mathcal{B}'}(u(e_1'), \dots, u(e_n')) \underset{\text{Teo §10}}{=} \lambda \det_{\mathcal{B}}(u(e_1'), \dots, u(e_n')) \underset{(*)}{=} \lambda\, d(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(e_1', \dots, e_n') \underset{(**)}{=} d(\mathcal{B})$$ ∎