## §9. Formas multilineales alternadas

Vimos que a todo endomorfismo $u: V \to V$ de un $k$-e.v. de dimensión finita se le puede asociar una matriz en $M_n(k)$, pero ella depende de la elección de una base.

Objetivo: Asociar a $u$ un invariante, ie, algo que sólo depende de $u$.

Obs: Para $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ tenemos que $n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}}$ en $k$.

Notar que $p \cdot 1 = 0$ en $\mathbb{F}_p$, pero $n \cdot 1 \neq 0$ en $\mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$

Def: Sea $k$ cuerpo. Si $\exists n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ tq $n \cdot 1 = 0$ en $k$, entonces la característica de $k$ es el menor entero $\mathrm{car}(k) \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ con esta propiedad. Por otro lado, si $n \cdot 1 \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, decimos que $\mathrm{car}(k) = 0$.

Hecho (MAT214): Sea $k$ un cuerpo. Entonces:

i) Ya sea $\mathrm{car}(k) = 0$, y en tal caso $\mathbb{Q} \subseteq k$; o bien

ii) $\mathrm{car}(k) = p$ es un número primo, y en tal caso $\mathbb{F}_p \subseteq k$.

Ejemplo: $\mathrm{car}(\mathbb{F}_p) = p$ y $\mathrm{car}(\mathbb{Q}) = \mathrm{car}(\mathbb{R}) = \mathrm{car}(\mathbb{C}) = 0$.

⚠ En todo lo que sigue, supondremos siempre que $\mathrm{car}(k) \neq 2$, ie, $2 \neq 0 \iff 1 \neq -1$. (e.g. $k = \mathbb{Q}$).

Def: Sea $V$ un $k$-e.v. Una forma $m$-multilineal sobre $V$ es una función

$$F : V^m = V \overset{m \text{ veces}}{\times \dots \times} V \longrightarrow k$$
$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto F(x_1, \dots, x_m)$$

que es lineal en cada variable. Diremos que $F$ es alternada si

$$F(x_1, \dots, x_m) = 0$$

cuando dos de los $x_j$ son iguales.

Ejemplo: Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilineal (ie, $m=2$) sobre $\mathbb{R}^2$, y sea $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ la base canónica. Luego:

$$F((x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22})) = F(x_{11} e_1 + x_{21} e_2, x_{12} e_1 + x_{22} e_2)$$

$$= x_{11} F(e_1, x_{12} e_1 + x_{22} e_2) + x_{21} F(e_2, x_{12} e_1 + x_{22} e_2) \quad [F \text{ lineal en } 1^a \text{ variable}]$$

$$= x_{11}(x_{12} \underbrace{F(e_1,e_1)}_{:=a} + x_{22} \underbrace{F(e_1,e_2)}_{:=b}) + x_{21}(x_{12} \underbrace{F(e_2,e_1)}_{:=c} + x_{22} \underbrace{F(e_2,e_2)}_{:=d}) \quad [F \text{ lineal } 2^a \text{ variable}]$$

$$= a x_{11} x_{12} + b x_{11} x_{22} + c x_{21} x_{12} + d x_{21} x_{22}$$

Recíprocamente, toda función de la forma anterior es bilineal.

Notar que $F$ es alternada $\iff F((x_{11},x_{21}),(x_{11},x_{21})) = 0 \quad \forall (x_{11},x_{21}) \in \mathbb{R}^2$

$\iff a x_{11}^2 + (b+c) x_{11}x_{21} + d x_{21}^2 = 0 \ \forall \ (x_{11},x_{21}) \in \mathbb{R}^2$

$\iff a = b+c = d = 0$

Luego, $F$ se escribe como $F((x_{11},x_{21}),(x_{12},x_{22})) = b\,(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$

o equivalentemente $F\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22}\end{pmatrix}\right) = b\,\underbrace{(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})}$ ¡"Determinante $2\times 2$"!

Prop: Sea $V$ un $k$-e.v. y $F : V^m \to k$ una forma multilineal. Entonces,

$F$ alternada $\iff F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_m) = -F(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_m)$

para todos $x_1,\dots,x_m \in V$ y $1 \le i < j \le m$.

Dem: $(\Leftarrow)$ Si $x_i = x_j = x$, entonces $F(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_m) = -F(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_m)$

ie, $2F(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_m) \underset{car(k)\neq 2}{\Rightarrow} F(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_m) = 0$, ie, $F$ alternada.

$(\Rightarrow)$ $0 = F(x_1,\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_m)$ [$F$ alternada]

$= F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_m) + F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_m)$ [$F$ bilineal]

$+ F(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_m) + F(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_m)$

$= F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_m) + F(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_m)$ [$F$ alternada]

$\Rightarrow F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_m) = -F(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_m)$ ■

Obs: La proposición anterior equivale a decir que $F$ es alternada si y sólo si para toda transposición $\tau \in S_m$ se tiene

$$F(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(m)}) = -F(x_1,\dots,x_m).$$

Prop: Sea $V$ un $k$-e.v. y sea $F : V^m \to k$ una forma multilineal alternada. Entonces:

1) Para toda $\sigma \in S_m$, tenemos

$$F(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}) = \varepsilon(\sigma) F(x_1,\dots,x_m).$$

2) $F(x_1,\dots,x_m)$ no cambia si adicionamos a $x_i$ una combinación lineal de las otras variables.

3) $F(x_1,\dots,x_m) = 0$ si los $x_i$ son l.d. En particular, toda forma $m$-multilineal alternada es nula si $m > \dim_k(V)$.

Dem: Descomponemos $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_K$ como producto de transposiciones, con $\varepsilon(\sigma) = (-1)^K$. El punto 1 se obtiene por inducción en $K$. Para 2, notamos que

$$F(x_1,\dots,x_{i-1},x_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j x_j, x_{i+1},\dots,x_m) \underset{F \text{ multilineal}}{=} F(x_1,\dots,x_m) + \sum_{j\neq i} \lambda_j F(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_m) \underset{F \text{ alternada}}{=} F(x_1,\dots,x_m)$$ ✓

Si los $x_i$ son l.d., uno de ellos es combinación lineal de los otros. Por 2, podemos adicionar a dicho vector el opuesto aditivo de esta combinación lineal sin cambiar el valor de $F$, que es por lo tanto cero. Esto prueba 3 ■