§8. Permutaciones:

Def: Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Una permutación del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ es una función biyectiva $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, la cual denotaremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)).$$

Ejemplo: La permutación $\sigma = (2,3,4,1)$ corresponde a $\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{cases}$

Notación: El conjunto de todas las permutaciones de $\{1,\dots,n\}$

$$S_n = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \text{ biyección}\}$$

es llamado el grupo simétrico. Es conjunto es en efecto un grupo: si $\sigma, \tau \in S_n$ entonces $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$ (composición) pertenece a S_n, la función identidad id pertenece a S_n, y si $\sigma \in S_n$ entonces su inversa $\sigma^{-1} \in S_n$.

Ejemplo: Si $\sigma = (2,3,4,1)$ y $\tau = (2,1,4,3)$, entonces $\tau\sigma = (1,4,3,2)$ y $\sigma\tau = (3,2,1,4)$. Además, podemos calcular σ^{-1} "gráficamente":

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{cases} \Rightarrow \sigma^{-1} : \begin{cases} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 3 \end{cases}, \text{ ie, } \sigma^{-1} = (4,1,2,3).$$

Ejercicio Verificar que $S_3 = \{ id = (1,2,3), (2,1,3), (3,2,1), (1,3,2), (2,3,1), (3,1,2) \}$

Prop: $\operatorname{card}(S_n) = n!$

Dem: Inducción en n: $S_1 = \{(1)\}$ ✓. Sup. que $\operatorname{card}(S_n) = n!$ para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y consideremos S_{n+1}:

Para $k \in \{1,\dots,n+1\}$, sea $A_k = \operatorname{card}(\{\sigma = (a_1,\dots,a_{n+1}) \in S_{n+1} \text{ tq } a_k = n+1\})$.

La correspondencia biyectiva

$$\{\sigma = (a_1,\dots,a_{n+1}) \in S_{n+1} \text{ tq } a_k = n+1\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} S_n$$

$$\sigma \longmapsto (a_1,\dots,a_{k-1}, a_{k+1},\dots,a_{n+1}) \in S_n$$

$$(b_1,\dots,b_{k-1}, n+1, b_k,\dots,b_n) \longleftarrow (b_1,\dots,b_n) \in S_n$$

y la hipótesis de inducción, implican que $A_k = |S_n| = n!$.

Finalmente, $|S_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} A_k = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)!$ ■

Def: Una permutación $\tau \in S_n$ que sólo cambia dos elementos de $\{1,\dots,n\}$ es llamada una transposición.

Notación: Para $n \geq 2$ y todos $i,j \in \{1,\dots,n\}$ con $i \neq j$, denotaremos por $\tau = (i,j)$ a la transposición $\tau : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k & \forall k \neq i,j \end{cases}$

Con esta notación, tenemos que $(i,j) = (j,i) = (i,j)^{-1}$.

Ejemplo: $S_3 = \{ id, (1,2), (2,3), (1,3), (2,3,1), (3,1,2) \}$.

Def: Sea $\sigma \in S_n$ y sean $i,j \in \mathbb{N}$ tq $1 \leq i < j \leq n$. Decimos que σ invierte i y j si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Ejemplo: 1) $id = (1,2,\ldots,n) \in S_n$ tiene 0 inversiones.

2) La transposición $(1,2) \in S_n$ tiene 1 inversión.

3) $(2,3,1)$ y $(3,1,2)$ en S_3 tiene 2 inversiones.

Ejercicio: Demostrar que la transposición $(i,j) \in S_n$ tiene $2|i-j|-1$ inversiones.

Def: Sea $\sigma \in S_n$. El número
$$\varepsilon(\sigma) := (-1)^{\text{nº de inversiones de } \sigma}$$
es llamado la signatura de σ. Decimos que σ es par (resp. impar) si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$).

Ejemplo: 1) $\varepsilon(id) = (-1)^0 = 1$ (par)

2) Si $(i,j) \in S_n$ transposición, entonces $\varepsilon((i,j)) = (-1)^{2|i-j|-1} = -1$ (impar).

3) En S_3 hay 3 permutaciones pares y 3 impares.

Lema: Sea $\sigma \in S_n$, entonces $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

Dem: La cantidad $\prod_{i<j} \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ tiene el mismo signo que $\varepsilon(\sigma)$. Además,
$$\left(\prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right)^2 = \prod_{i<j} \left(\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right)^2 = \frac{\prod_{i \neq j} (\sigma(j)-\sigma(i))^2}{\prod_{i\neq j} (j-i)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma \text{ biyección}}}{=} 1 \quad \blacksquare$$

Prop: La signatura $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ verifica $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ para todos $\sigma, \tau \in S_n$.

Dem: Sean $\sigma, \tau \in S_n$. Como $\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$, esta cantidad no depende de i y j.

Luego, $\varepsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \dfrac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} \Rightarrow \varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{i<j} \dfrac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{j-i}$.
$$= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$
$$= \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau) \quad \blacksquare$$

Obs: Notar que los elementos $\{id, (1,2), (2,3), (1,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$ de S_3 pueden ser escritos como productos de transposiciones: $id = (1,2)(1,2)$; $(2,3,1) = (1,3)(1,2)$ y $(3,1,2) = (1,2)(1,3) = (1,3)(2,3)$ (la escritura no es única). En general:

Prop: Toda $\sigma \in S_n$ se escribe (de forma no única) como producto de transposiciones. Toda permutación par (resp. impar) se descompone necesariamente en un número par (resp. impar) de transposiciones.

Idea: Dada $\sigma \in S_n$, multiplicar a la izquierda por transposiciones para ir obteniendo cada vez más elementos fijos. Por ejemplo:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sigma(1)=2}{\Longrightarrow} (1,2)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sigma(2)=4}{\Longrightarrow} (2,4)(1,2)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sigma(3)=4}{\Longrightarrow} (3,4)(2,4)(1,2)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (4,5) \Rightarrow \sigma = (1,2)^{-1}(2,4)^{-1}(3,4)^{-1}(4,5) = (1,2)(2,4)(3,4)(4,5).$$

Finalmente, si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1)\cdots\varepsilon(\tau_r) = (-1)^r \Rightarrow \sigma$ y r tienen misma paridad $\blacksquare$