⚠ Tal como se discutió en primer año, el proceso de reducción de columnas (resp. filas) permite calcular A^{-1} si $A \in Gl_n(k)$, puesto que (con la notación anterior) la reducción se reduce en este caso a la igualdad $A' = AP = I_n$ (resp. $A'' = QA = I_n$) de donde $P = A^{-1}$ (resp. $Q = A^{-1}$). Es muy importante escoger hacer operaciones sobre columnas o sobre filas, pero no mezclarlas!

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A \in Gl_n(k)$ y supongamos que $AB = BA$ para toda $B \in Gl_n(k)$. Probar que $A = \lambda I_n$ para cierto $\lambda \neq 0$.

§7. Polinomios de endomorfismos :

Sea V un k-e.v. y sea $u : V \to V$ un endomorfismo.

Notación: $u^0 := id_V$, $u^1 := u$, $u^2 = u \circ u$, $\ldots$, $u^n := \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ veces}}$

De manera general, si $P \in k[X]$ es un polinomio dado por $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d$, entonces definimos $P(u) \in End_k(V)$ mediante:

$$P(u) := a_0\, id_V + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_d u^d .$$

La definición anterior y la definición de composición de funciones implican:

Lema: La aplicación $k[X] \to End_k(V)$, $P \mapsto P(u)$ es un morfismo de k-álgebras, ie, es k-lineal y si $P, Q \in k[X]$ entonces $PQ \mapsto P(u)Q(u)$ ■

Ejemplo: $P(X) = X^4 - 1$.

1) Si $k = \mathbb{R}$, $P(X) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$, por lo que
$$u^4 - id_V = (u - id_V)(u + id_V)(u^2 + id_V) \quad \text{para todo } u \in End_{\mathbb{R}}(V).$$

2) Si $k = \mathbb{C}$, $P(X) = (X-1)(X+1)(X+i)(X-i)$, por lo que
$$u^4 - id_V = (u - id_V)(u + id_V)(u + i\, id_V)(u - i\, id_V) \quad \text{para todo } u \in End_{\mathbb{C}}(V).$$

Obs: La construcción anterior funciona del mismo modo si consideramos $A \in M_n(k)$ y definimos $P(A) := a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_d A^d$.

Prop: Para todo $u \in End_k(V)$ endomorfismo, donde $\dim_k(V) = n$ es finita, existe $P \in k[X]$ tq $P \neq 0$ y $P(u) = 0$.

Dem: Como $\dim_k End_k(V) = n^2$, los vectores $id_V, u, u^2, \ldots, u^{n^2}$ de $End_k(V)$ son l.d. $\Rightarrow \exists\, a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in k$ no todos nulos tq $a_0\, id_V + a_1 u + \ldots + a_{n^2} u^{n^2} = 0$. Luego, basta escoger $P(X) := a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n^2} X^{n^2}$. ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Hallar $P \in \mathbb{R}[X]$ no-nulo tq $P(A) = 0$.