§6. Operaciones elementales sobre filas y columnas:

Sea $A \in M_{m\times n}(k)$, y denotemos por $(e_1,\dots,e_n)$ y $(f_1,\dots,f_m)$ las bases canónicas de k^n y k^m, respectivamente.

Reducción de columnas: Consideremos las operaciones elementales dadas por

a) Intercambiar las columnas C_i y C_j de A $\iff$ Multiplicar a la derecha por la matriz de permutación $P(i,j)$ asociada al automorfismo de k^n dado por

$$\begin{cases} e_i \mapsto e_j \\ e_j \mapsto e_i \\ e_l \mapsto e_l & \text{si } l \neq i,j \end{cases} \qquad \text{E.g. } (n=3):\ P(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Multiplicar C_j por $\lambda_j \neq 0$ $\iff$ Mult. a la derecha por

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j\text{-ésima columna} \end{array}$$

c) Adicionar λC_i a C_j $\iff$ Mult. a la derecha por $B_{ij}(\lambda) := I_n + \lambda E_{ij}$,

ie, por
$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-ésima fila} \\ \uparrow & \\ j\text{-ésima columna} & \end{array}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Las operaciones ⓐ, ⓑ y ⓒ son automorfismos de k^n. (e.v. de partida)

Recuerdo: Al realizar operaciones elementales sobre columnas obtenemos una matriz de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots & & & \\ \vdots & * & & 1 & & & \\ * & * & & * & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

donde las columnas C'_j son nulas si $j > r$, y donde $C'_1,\dots,C'_r \in k^m$ son l.i.
Es decir $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A') = \operatorname{Vect}_k\langle C'_1,\dots,C'_r\rangle$ y $r = \operatorname{rg}(A)$.

La matriz A' obtenida por reducción de columnas verifica $A' = AP$, donde P es la matriz (invertible) que corresponde a las operaciones elementales efectuadas.
Dado que $\ker(A') = \operatorname{Vect}_k\langle e_{r+1},\dots,e_n\rangle$, la igualdad $A' = AP$ implica

$$\ker(A) = \operatorname{Vect}_k\langle P_{r+1},\dots,P_n\rangle$$

es el espacio generado por las últimas $(n-r)$ columnas de P.

Ejemplo concreto: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ asociada a la aplicación $u: \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$, $(x,y,z) \mapsto (-y+4z,\, 2x+2y-3z)$. La reducción de columnas
vote"

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \mapsto \frac{1}{2}C_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \mapsto C_3 + 3C_1]{C_2 \mapsto C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \mapsto -C_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \mapsto C_3 - 4C_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 & -5/2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}A' \\ \\ \}P \end{matrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{Q}^2$ (ie, u es sobreyectiva).

Además, $\ker(A) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}}\left\langle \begin{pmatrix} -5/2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}}\left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ (ie, $\dim_{\mathbb{Q}} \ker(A) = 1$).

<u>Reducción de filas</u>: Consideremos las operaciones elementales dadas por:

a) Intercambiar las filas F_i y F_j de A $\Leftrightarrow$ Multiplicar a la <u>izquierda</u> por $P(i,j)$.

b) Multiplicar F_i por $\lambda_i \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Mult. a la <u>izquierda</u> por $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ ← i-ésima fila

c) Adicionar λF_i a F_j $\Leftrightarrow$ Mult. a la <u>izquierda</u> por $B_{ji}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ji}$.

De manera análoga que para la reducción de columnas, las operaciones ⓐ, ⓑ y ⓒ son automorfismos de k^m (e.v. de <u>llegada</u>).

<u>Recuerdo</u>: Al realizar operaciones elementales sobre ~~columnas~~ <u>filas</u> obtenemos una matriz de la forma

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & \cdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde las filas F_j'' de A'' son nulas si $j > r$ y las filas $F_1'', \ldots, F_r'' \in k^n$ son l.i.

La matriz A'' obtenida por reducción de filas verifica $A'' = QA$, donde $Q \in GL_m(k)$ corresp. a las operaciones fila efectuadas. En part, $\ker(A) = \ker(A'')$ y $rg(A) = rg(A'') = r$.

Más aún, el sistema lineal $A'' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ provee <u>ecuaciones</u> para $\ker(A)$ y si denotamos $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in k^m$ y $Y'' = QY$, entonces $y''_{r+1} = \cdots = y''_m = 0$ provee ecuaciones para $Im(A)$.

<u>Ejemplo concreto</u>: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 8 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ asociada a la aplicación

$u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z,t) \mapsto (x+2y+3z+4t, x+3y+6z+6t, 3x+8y+15z+16t)$.

Reducción de filas:

pivote

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & y_1 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & y_2 \\ 3 & 8 & 15 & 16 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & y_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & y_2 - y_1 \\ 3 & 8 & 15 & 16 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - 3F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & y_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & y_2 - y_1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & y_3 - 3y_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & y_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_1 - 2y_2 \end{array}\right).$$

$$\underbrace{}_{A''} \qquad \underbrace{}_{Y''}$$

Luego: $\ker(A) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. <u>Base</u>: x_1 y x_2 están determinadas por x_3 y x_4.

$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\ker(A)$

$\uparrow x_3 = 1, x_4 = 0$ $\qquad$ $\uparrow x_3 = 0, x_4 = 1$

$y_3'' = 0 \Leftrightarrow y_3 = y_1 + 2y_2$ (Ecuación de $Im(A) \subseteq \mathbb{R}^3$)

<u>Base</u>: y_3 está det. por y_1 & y_2 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ generan $Im(A)$.

$\uparrow y_1 = 1, y_2 = 0$ $\qquad$ $\uparrow y_1 = 0, y_2 = 1$

⚠ Tal como se discutió en primer año, el proceso de reducción de columnas (resp. filas) permite calcular A^{-1} si $A \in Gl_n(k)$, puesto que (con la notación anterior) la reducción se reduce en este caso a la igualdad $A' = AP = I_n$ (resp. $A'' = QA = I_n$) de donde $P = A^{-1}$ (resp. $Q = A^{-1}$). Es muy importante escoger hacer operaciones sobre columnas o sobre filas, pero no mezclarlas!

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A \in Gl_n(k)$ y supongamos que $AB = BA$ para toda $B \in Gl_n(k)$. Probar que $A = \lambda I_n$ para cierto $\lambda \neq 0$.

§7. Polinomios de endomorfismos:

Sea V un k-e.v. y sea $u : V \to V$ un endomorfismo.

Notación: $u^0 := id_V$, $u^1 := u$, $u^2 = u \circ u$, ..., $u^n := \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ veces}}$

De manera general, si $P \in k[X]$ es un polinomio dado por $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d$, entonces definimos $P(u) \in \mathrm{End}_k(V)$ mediante:

$$P(u) := a_0\, id_V + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_d u^d .$$

La definición anterior y la definición de composición de funciones implican:

Lema: La aplicación $k[X] \to \mathrm{End}_k(V)$, $P \mapsto P(u)$ es un morfismo de k-álgebras, ie, es k-lineal y si $P, Q \in k[X]$ entonces $PQ \mapsto P(u)Q(u)$ ■

Ejemplo: $P(X) = X^4 - 1$.

1) Si $k = \mathbb{R}$, $P(X) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$, por lo que

$$u^4 - id_V = (u - id_V)(u + id_V)(u^2 + id_V) \quad \text{para todo } u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V).$$

2) Si $k = \mathbb{C}$, $P(X) = (X-1)(X+1)(X+i)(X-i)$, por lo que

$$u^4 - id_V = (u - id_V)(u + id_V)(u + i\, id_V)(u - i\, id_V) \quad \text{para todo } u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$$

Obs: La construcción anterior funciona del mismo modo si consideramos $A \in M_n(k)$ y definimos $P(A) := a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_d A^d$.

Prop: Para todo $u \in \mathrm{End}_k(V)$ endomorfismo, donde $\dim_k(V) = n$ es finita, existe $P \in k[X]$ tq $P \neq 0$ y $P(u) = 0$.

Dem: Como $\dim_k \mathrm{End}_k(V) = n^2$, los vectores $id_V, u, u^2, \ldots, u^{n^2}$ de $\mathrm{End}_k(V)$ son l.d. $\Rightarrow \exists\, a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in k$ no todos nulos tq $a_0\, id_V + a_1 u + \ldots + a_{n^2} u^{n^2} = 0$. Luego, basta escoger $P(X) := a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n^2} X^{n^2}$. ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Hallar $P \in \mathbb{R}[X]$ no-nulo tq $P(A) = 0$.