$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Probar que la aplicación $M_{m\times n}(k) \to M_{n\times m}(k)$, $A \mapsto {}^tA$ es lineal, y que es un isomorfismo. Más aún, si $B \in M_{n\times p}(k)$ entonces ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ en $M_{p\times m}(k)$.

§5. Cambios de base: Sea V un k-e.v.

Def: Un endomorfismo $f: V \to V$ es un automorfismo si es biyectivo o, equivalentemente, si $\exists f^{-1}: V \to V$ endomorfismo tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_V$.

De manera similar, una matriz cuadrada $A \in M_n(k)$ es invertible si existe $A^{-1} \in M_n(k)$ tq $AA^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$; A^{-1} es la inversa de A.

Notación: $GL(V) := \{f: V \to V \text{ automorfismo}\}$ es el grupo general lineal.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Verificar que $GL(V)$ es un grupo (Ayuda: $(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$).

$GL_n(k) := \{A \in M_n(k) \text{ invertible}\}$.

Notar que la elección de una base $\mathcal{B}$ de V induce un isomorfismo de grupos $GL(V) \xrightarrow{\sim} GL_n(k)$, $f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$, donde $n = \dim_k(V)$.

Prop: 1) Sup. que V es de dimensión finita, y sean $u, v \in End_k(V)$ tales que $u \circ v = id_V \Rightarrow u, v \in GL(V)$ y $u = v^{-1}$.

2) Sean $A, B \in M_n(k)$ tq $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$, $A, B \in GL_n(k)$ y $B = A^{-1}$.

3) Si A invertible, entonces ${}^tA$ invertible. Más aún, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Dem: 1) $\forall x \in V$ se tiene $x = u(v(x)) \Rightarrow u$ sobreyectivo y v inyectivo.

$\underset{\substack{V \text{ dim}\\ \text{finita}}}{\Rightarrow}$ u y v son isomorfismos. En part, $\underbrace{u^{-1}\circ u}_{id_V} \circ v = u^{-1} = v$ ✓

2) Sea u (resp. v) el endomorfismo $k^n \to k^n$ asociado a A (resp. B).

Luego, $AB = I_n \Rightarrow u \circ v = id_V \underset{1}{\Rightarrow} u, v$ isomorfismos y $u = v^{-1}$.

En part, $B = A^{-1}$ y $BA = I_n$.

3) Si $AB = BA = I_n$, entonces ${}^tB\,{}^tA = {}^tA\,{}^tB = {}^tI_n = I_n \Rightarrow {}^tA \in GL_n(k)$ y ${}^tB = {}^t(A^{-1})$ es la inversa de ${}^tA$. ∎

Lema: Sup. que $\dim_k(V) = n$ y sea $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base de V. Sea $f: V \to V$ endomorfismo y denotemos $w_i := f(v_i)$. Si $(w_1, \dots, w_n)$ es una base de V, entonces f es un isomorfismo, cuya inversa $g: V \to V$ está dada por $g(w_i) = v_i$.

Dem: Sup. que $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ es una base de V.

$\Rightarrow \forall w \in V$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ tq $w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$
$= f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$

es decir, f es sobreyectivo $\underset{\substack{V \text{ dim}\\ \text{finita}}}{\Rightarrow}$ f biyectivo ✓

Notar que $(g\circ f)(v_i) = v_i\ \forall i$ y $(f\circ g)(w_i) = w_i\ \forall i \underset{\mathcal{B} \text{ y } \mathcal{C} \text{ bases}}{\Longrightarrow} g\circ f = f \circ g = id_V$ ∎

Def: Sup. que $\dim_k(V) = n$ y sean $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ y $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ dos bases de V. Sea P la matriz (invertible) expresando $\mathcal{B}'$ en términos de $\mathcal{B}$, i.e., si

$$v_j = p_{1j} e_1 + \dots + p_{nj} e_n$$

entonces $P := \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(k)$; y es llamada la <u>matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$</u> y la denotaremos $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

⚠ Por definición, $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ es la matriz que expresa $\mathcal{B}$ en términos de $\mathcal{B}'$

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Verificar que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_V)$ y que $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_V)$. En otras palabras (¡y contra-intuitivamente!):

$$(V, \mathcal{B}') \xrightarrow[P]{id_V} (V, \mathcal{B}) \qquad y \qquad (V, \mathcal{B}) \xrightarrow[P^{-1}]{id_V} (V, \mathcal{B}').$$

Def: Todo vector $v \in V$ se escribe de manera única como

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \qquad y \qquad v = x_1' v_1 + \dots + x_n' v_n$$

y las x_i (resp. x_i') son las <u>coordenadas</u> de v respecto a $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Luego, $v \in V$ se representa, respecto a la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$), por el vector:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}\right).$$

Prop (cambio de coordenadas): $X = PX'$.

Dem: Si escribimos $v_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$ y $v = \sum_{j=1}^n x_j' v_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j' p_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j'\right) e_i$ entonces al comparar con $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, obtenemos que $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j'$, i.e., $X = PX'$ ∎

Teorema (cambio de base): Sea $A \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) \in M_{m \times n}(k)$ la matriz de $u : V \to W$ respecto a la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V y $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ de W. Sea $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{C}'$) otra base de V (resp. W), y sea $P \in GL_n(k)$ (resp. $Q \in GL_m(k)$) la matriz de cambio de base. Entonces,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(u) = Q^{-1} A P$$

Dem: El diagrama

$$\begin{tikzcd}
(V, \mathcal{B}) \arrow[r, "u"', "A = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)" below] & (W, \mathcal{C}) \arrow[d, "id_W"', "Q^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C})"] \\
(V, \mathcal{B}') \arrow[u, "P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')", "id_V"'] \arrow[r, "u", "Q^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(u)" below] & (W, \mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

es conmutativo ∎

Obs: En coordenadas, si $Y = AX$, $X = PX'$ y $Y = QY'$

$\Rightarrow Y' = Q^{-1} Y = Q^{-1} A X = (Q^{-1} A P) X'$.

<u>Notación</u>: $O_{p,q} \in M_{p\times q}(k)$ denota la matriz nula de p filas y q columnas.

<u>Corolario</u>: Sea $A \in M_{m\times n}(k)$ y sea $r = rg(A)$. Entonces:

1) $\exists\, P \in GL_n(k)$ y $Q \in GL_m(k)$ tq $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$.

2) Si $\exists\, P \in GL_n(k)$ y $Q \in GL_m(k)$ tq $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_s & O_{s,n-s} \\ O_{m-s,s} & O_{m-s,n-s} \end{pmatrix} \Rightarrow s = r = rg(A)$.

<u>Dem</u>: Sean $(e_1,\dots,e_n)$ y $(f_1,\dots,f_m)$ las bases canónicas de k^n y k^m, y sea $u: k^n \to k^m$ la aplicación lineal asociada a A.

1) Sea $r = rg(A) = \dim_k Im(u)$ y sea $(w_1,\dots,w_r)$ base de $Im(u)$, la cual completamos en una base $\mathcal{C} = (w_1,\dots,w_m)$ de k^m.
Consideremos $v_1,\dots,v_r \in k^n$ tq $u(v_j) = w_j\ \forall j$ y sea $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)$ una base de $\ker(u)$. Al probar el Teorema del rango, vimos que $\mathcal{B} := (v_1,\dots,v_r,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)$ es una base de k^n. Más aún, por definición, tenemos que:

$$Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Así, el diagrama

$$\begin{tikzcd} (k^n,\mathcal{B}) \arrow[r, "\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}", "u"'] & (k^m,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q", "id_{k^m}"'] \\ (k^n,(e_j)) \arrow[u, "id_{k^n}"', "P^{-1}"] \arrow[r, "A", "u"'] & (k^m,(f_i)) \end{tikzcd}$$

implica que $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) = Q^{-1}AP$ ✓

2) La igualdad $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_s & O_{s,n-s} \\ O_{m-s,s} & O_{m-s,n-s} \end{pmatrix}$ implica que existen bases $(v_1,\dots,v_n)$ de k^n y $(w_1,\dots,w_m)$ de k^m tq $u(v_i) = w_i$ para $i = 1,\dots,s$ y $u(v_j) = 0$ para $j = s+1,\dots,n \Rightarrow Im(u) = Vect_k(w_1,\dots,w_s) \Rightarrow s = rg(A)$ ■

<u>Prop</u>: Sea $A \in M_{m\times n}(k)$, entonces $rg(A) = rg({}^tA)$. En part, $rg(A)$ es el número máximo de <u>filas</u> de A que son l.i.

<u>Dem</u>: Sea $r = rg(A) \underset{\text{corolario}}{\Rightarrow} \exists\, P \in GL_n(k)$ y $Q \in GL_m(k)$ tq $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow {}^tP\,{}^tA\,{}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,m-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,m-r} \end{pmatrix} \underset{\text{corolario}}{\Rightarrow} r = rg({}^tA)$ ■

<u>Def</u>: Dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(k)$ son <u>equivalentes</u> si $\exists\, P \in GL_n(k)$ y $Q \in GL_m(k)$ tq $Q^{-1}AP = B \underset{\text{corolario}}{\Leftrightarrow} rg(A) = rg(B)$.

<u>Caso particular importante</u>: $V = W$ (endomorfismos) y $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

<u>Teorema</u>: Sea $A = Mat_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(k)$ la matriz del endomorfismo $u: V \to V$ respecto a la base $\mathcal{B}$ de V. Si $\mathcal{B}'$ es otra base de V y si $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, entonces

$$Mat_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}AP.$$

<u>Def</u>: Dos matrices $A, B \in M_n(k)$ son <u>semejantes</u> si $\exists\, P \in GL_n(k)$ tq $P^{-1}AP = B$. Es decir, A y B representan (en bases diferentes) el mismo endomorfismo de k^n.

⚠ Veremos que la relación de semejanza es mucho más fina que aquella dada por el rango.