§4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos k-e.v.

Def: Definimos el k-e.v. de aplicaciones lineales de V en W mediante

$$\mathrm{Hom}_k(V,W) = \mathcal{L}(V,W) := \{ f : V \to W \text{ lineal} \}.$$

Ejercicio: $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ es un k-e.v.

Caso particular: Si $\dim_k(V) = n$ y $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ definimos $w_i := \varphi(e_i) \in W$ para $i = 1, \dots, n$.

Todo vector $v \in V$ se escribe de manera única como $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ y luego (por linealidad): $\varphi(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$.

Conclusión: $\varphi : V \to W$ está determinada por los vectores $w_1, \dots, w_n \in W$.

Sub-caso particular: Si $\dim_k(W) = m$ y $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ es una base de W, entonces cada $w_j = \varphi(e_j)$ se escribe de manera única como

$$w_j = a_{1j} f_1 + \dots + a_{mj} f_m$$

que representamos usando el vector columna $w_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Luego, φ está determinada por la matriz

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(k).$$

Teorema: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V y sea $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ una base de W.

1. Una aplicación lineal $\varphi : V \to W$ está determinada por una matriz de m filas y n columnas. Más precisamente, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_k(V,W) &\xrightarrow{\sim} M_{m\times n}(k) \\ \varphi &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de k-e.v.

2. Si $\mathcal{U}$ es otro k-e.v. y si $\mathcal{A} = (d_1, \dots, d_p)$ es una base de $\mathcal{U}$. Entonces para todos $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ y $\psi \in \mathrm{Hom}_k(\mathcal{U},V)$ se tiene que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(\psi).$$

Dem: El punto 1 sigue de la discusión anterior, mientras que el punto 2 sigue precisamente de la definición de multiplicación de matrices ∎

Obs: sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$ y sean $(e_1, \dots, e_n)$ y $(f_1, \dots, f_m)$ las bases canónicas de k^n y k^m, resp. Entonces, A corresponde a la aplicación lineal $u: k^n \to k^m$ dada por

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Es decir, la j-ésima columna de A es la imagen de e_j, el j-ésimo vector de la base canónica de k^n.

Corolario: Sean $A \in M_{m\times n}(k)$ y $B \in M_{n\times p}(k)$, y sean $u: k^n \to k^m$ y $v: k^p \to k^n$ las aplicaciones lineales asociadas. Entonces, AB es la matriz asociada a la aplicación $(u\circ v): k^p \to k^m$.

⚠ Si $A \in M_{m\times n}(k)$ y $B \in M_{\ell\times p}(k)$, entonces AB está definido si y sólo si $n = \ell$

Caso particular importante: $V = W$ (endomorfismos) y $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Teorema: El k-e.v. $M_n(k)$ es una k-álgebra, es decir, es un anillo (no conmutativo si $n \geq 2$) compatible con la estructura de k-e.v. Del mismo modo si V es un k-e.v. entonces el espacio de endomorfismos $\mathrm{End}_k(V)$ es una k-álgebra. En particular, si $\dim_k(V) = n$ y si escogemos una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_k(V) &\longrightarrow M_n(k) \\ u &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos y de k-e.v., i.e., un isomorfismo de k-álgebras.

La correspondencia entre aplicaciones lineales y matrices nos permite definir:

Def: Sea $A \in M_{m\times n}(k)$. Definimos su núcleo $\ker(A)$, su imagen $\mathrm{Im}(A)$ y su rango $\mathrm{rg}(A)$ como el núcleo, imagen y rango de la aplicación $u: k^n \to k^m$ asociada a A.

Observación: 1) $\mathrm{rg}(A) := \mathrm{rg}(u) \leq n$ (teorema del rango) y $\mathrm{rg}(u) \leq m$ (pues $\mathrm{Im}(u)$ es un sub-e.v. de k^m). Luego, $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m,n)$.

2) $\mathrm{Im}(u)$ es el sub-e.v. de k^m generado por las columnas de A, luego $\mathrm{rg}(A)$ es el número máximo de columnas de A que son l.i.

3) Más adelante: $\mathrm{rg}(A)$ es el número máximo de filas de A que son l.i.

Para esto último, necesitamos definir:

Def: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(k)$, definimos su transpuesta como

$${}^tA := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(k), \text{ i.e., } ({}^tA)_{ij} = a_{ji}. \text{ En part, } {}^t({}^tA) = A.$$

Ejercicio importante Probar que la aplicación $M_{m\times n}(k) \to M_{n\times m}(k)$, $A \mapsto {}^tA$ es lineal, y que es un isomorfismo. Más aún, si $B \in M_{n\times p}(k)$ entonces ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ en $M_{p\times m}(k)$.

§5. Cambios de base: Sea V un k-e.v.

Def: Un endomorfismo $f: V \to V$ es un automorfismo si es biyectivo o, equivalentemente, si $\exists f^{-1}: V \to V$ endomorfismo tq $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_V$.

De manera similar, una matriz cuadrada $A \in M_n(k)$ es invertible si existe $A^{-1} \in M_n(k)$ tq $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$; A^{-1} es la inversa de A.

Notación: $GL(V) := \{ f : V \to V \text{ automorfismo} \}$ es el grupo general lineal.

Ejercicio Verificar que $GL(V)$ es un grupo (Ayuda: $(f\circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$).

$GL_n(k) := \{ A \in M_n(k) \text{ invertible} \}$.

Notar que la elección de una base $\mathcal{B}$ de V induce un isomorfismo de grupos $GL(V) \xrightarrow{\sim} GL_n(k)$, $f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$, donde $n = \dim_k(V)$.

Prop: 1) Sup que V es de dimensión finita, y sean $u, v \in End_k(V)$ tales que $u \circ v = id_V \Rightarrow u, v \in GL(V)$ y $u = v^{-1}$.

2) Sean $A, B \in M_n(k)$ tq $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$, $A, B \in GL_n(k)$ y $B = A^{-1}$.

3) Si A invertible, entonces ${}^tA$ invertible. Más aún, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Dem: 1) $\forall x \in V$ se tiene $x = u(v(x)) \Rightarrow u$ sobreyectivo y v inyectivo.

$\underset{\substack{V \text{ dim} \\ \text{finita}}}{\Rightarrow}$ u y v son isomorfismos. En part, $\underbrace{u^{-1} \circ u}_{id_V} \circ v = u^{-1} = v$ ✓

2) Sea u (resp. v) el endomorfismo $k^n \to k^n$ asociado a A (resp. B).

Luego, $AB = I_n \Rightarrow u \circ v = id_V \underset{1}{\Rightarrow} u, v$ isomorfismos y $u = v^{-1}$.

En part, $B = A^{-1}$ y $BA = I_n$.

3) Si $AB = BA = I_n$, entonces ${}^tB\,{}^tA = {}^tA\,{}^tB = {}^tI_n = I_n \Rightarrow {}^tA \in GL_n(k)$ y ${}^tB = {}^t(A^{-1})$ es la inversa de ${}^tA$. ■

Lema: Sup. que $\dim_k(V) = n$ y sea $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base de V. Sea $f: V \to V$ endomorfismo y denotemos $w_i := f(v_i)$. Si $(w_1, \dots, w_n)$ es una base de V, entonces f es un isomorfismo, cuya inversa $g: V \to V$ está dada por $g(w_i) = v_i$.

Dem: Sup. que $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ es una base de V.

$\Rightarrow \forall w \in V$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ tq $w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$
$= f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$

es decir, f es sobreyectivo $\underset{\substack{V \text{ dim} \\ \text{finita}}}{\Rightarrow}$ f biyectivo ✓

Notar que $(g\circ f)(v_i) = v_i \ \forall i$ y $(f \circ g)(w_i) = w_i \ \forall i \underset{\mathcal{B} \text{ y } \mathcal{C} \text{ bases}}{\Longrightarrow} g \circ f = f \circ g = id_V$ ■