§3. Núcleo, imagen y teorema del rango

Def: Sea $f: V \to W$ lineal.

1) El núcleo o kernel de f es el sub-e.v. dado por

$$\ker(f) := \{ v \in V \text{ tq } f(v) = 0 \} \subseteq V.$$

Notar que f inyectiva $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$.

2) La imagen de f es el sub-e.v. dado por

$$\mathrm{Im}(f) := f(V) = \{ f(v), \text{ donde } v \in V \} \subseteq W.$$

Notar que f sobreyectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = W$.

3) Si $\mathrm{Im}(f)$ es de dimensión finita $r \in \mathbb{N}$ (eg, si W o V son de dim. finita) el entero $r = \dim_k \mathrm{Im}(f)$ es llamado el rango de f, denotado $\mathrm{rg}(f)$.

Teorema del rango: Sea $f: V \to W$ lineal. Si V es de dimensión finita, entonces

$$\dim_k(V) = \dim_k \ker(f) + \mathrm{rg}(f).$$

En part, f sobreyectiva $\Leftrightarrow \dim_k(W) = \dim_k(V) - \dim_k \ker(f)$.

Dem: Sea $n := \dim_k(V)$. V dim. finita $\Rightarrow \ker(f) \subseteq V$ dim. finita.
Sea $d := \dim_k(\ker(f)) \leq n$, y sea $\mathcal{K} = (e_1, \dots, e_d)$ una base de $\ker(f)$.
Como $\mathrm{Im}(f) = f(V)$ está generada por n vectores (imagenes de una base de V)
$\Rightarrow r := \dim_k \mathrm{Im}(f) \leq n$.
Sea $(w_1, \dots, w_r)$ una base de $\mathrm{Im}(f)$, y para cada $i = 1, \dots, r$ sea $v_i \in V$ tq $f(v_i) = w_i$. Veamos que $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_d, v_1, \dots, v_r)$ es una base de V:

i) $\mathcal{B}$ genera: Sea $v \in V$ arbitrario. $\Rightarrow f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$

$$\underset{\text{lineal}}{\Rightarrow} f(v - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r)) = 0 \Rightarrow v - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_r v_r \in \ker(f) = \mathrm{Vect}_k(e_1, \dots, e_d)$$

Luego, $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_d e_d = \mathrm{Vect}_k(\mathcal{B})$ ✓

ii) $\mathcal{B}$ es libre: Si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_d e_d = 0$

$$\Rightarrow 0 = f(0) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r \underset{(w_1, \dots, w_r) \text{ l.i.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Luego, $0 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_d e_d \underset{(e_1, \dots, e_d) \text{ l.i.}}{\Longrightarrow} \mu_1 = \dots = \mu_d = 0$ ✓

Finalmente: $\dim_k(V) = \mathrm{card}(\mathcal{B}) = d + r = \dim_k \ker(f) + \mathrm{rg}(f)$ ■

Prop: Sea $f: V \to W$ lineal. Si $\dim_k(V) = \dim_k(W) = n$, entonces son equivalentes:
1) f es biyectiva (isomorfismo).
2) f es inyectiva
3) f es sobreyectiva.

Dem: ① $\Rightarrow$ ② & ③ ✓ Si f es inyectiva (resp. sobreyectiva) entonces $\ker(f) = \{0\}$ (resp. $\mathrm{Im}(f) = W$), por lo que el teorema del rango implica que f es sobreyectiva (resp. inyectiva), ie, biyectiva. ■