§2. Familias generadoras, libres, bases y dimensión:

Sea V un k-e.v.

Def: Sea $S \subseteq V$ subconj no-vacío. Definimos el sub-e.v. generado por S como:

$$\mathrm{Vect}_k(S) := \{ v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \text{ donde } r \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ v_i \in S \text{ y } \lambda_i \in k \}.$$

Es decir, $\mathrm{Vect}_k(S)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales (finitas) de elementos de S: es el sub-e.v. más pequeño de V que contiene S.

Convención: $\mathrm{Vect}_k(\emptyset) = \{0\}$.

Notación: Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es finito, escribiremos

$$\mathrm{Vect}_k(S) = \mathrm{Vect}_k(v_1, \ldots, v_n) = \{ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k \}.$$

Def: Un sub-conj $S \subseteq V$ es una familia generadora si $\mathrm{Vect}_k(S) = V$, ie, si todo elemento de V es combinación lineal de elementos de S. Diremos que V es finitamente generado si $\exists\, S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ conj finito tal que $V = \mathrm{Vect}_k(v_1, \ldots, v_n)$.

⚠ Toda familia conteniendo una familia generadora es generadora.

Ejemplo: 1) k^n está generado por los vectores

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

2) Los monomios $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ generan $k[X]$, pues todo polinomio se escribe como combinación lineal finita $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$.

Def: Sea $S \subseteq V$ sub-conj no vacío. Diremos que los elementos de S son linealmente independientes (o l.i.) y que S es una familia libre si:

$\forall r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $\forall v_1, \ldots, v_r \in S$ distintos y $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ se tiene que
"$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$"

En caso contrario, diremos que los elementos de S son linealmente dependientes (o l.d.). Esto último equivale a: $\exists\, r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $\exists\, v_1, \ldots, v_r \in S$ distintos y $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ escalares no todos nulos tq $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$. Por ejemplo, si $\lambda_i \neq 0$ entonces $v_i = -\sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j$ es comb. lineal de los otros v_j con $j \neq i$.

Caso particular: Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ finito, entonces los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son l.i. si:

$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ se tiene que "$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$".

⚠ Sup. que $S' \subseteq S \subseteq V$, entonces:

i) S libre $\Rightarrow S'$ libre

ii) S' l.d. $\Rightarrow S$ l.d.

Ejemplos: 1) Si $0 \in S \Rightarrow S$ es l.d.

2) $\{e_1, \dots, e_n\}$ en k^n es l.i., pues $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ se tiene $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

3) $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $k[X]$ es l.i. $\boxed{\text{Ejercicio}}$

Def: Una familia de vectores $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I} \subseteq V$ es una base de V si todo vector $v \in V$ se escribe de manera única como comb. lineal de los v_i, ie, si:
1) $\mathcal{B}$ es una familia generadora
2) $\mathcal{B}$ es libre.

En part, el conjunto finito de vectores $v_1, \dots, v_n$ forma una base de V si $\forall v \in V$, $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$ tal que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Ejemplos: 1) $\{e_1, \dots, e_n\}$ en k^n es una base, llamada base canónica de k^n.

2) Si $V = M_{m\times n}(k)$, definimos la matriz elemental $E_{ij} \in M_{m\times n}(k)$ como la matriz cuyos coeficientes son todos 0, excepto por el coeficiente (i,j) en la línea i y columna j, que vale 1. Entonces, toda matriz $A \in M_{m\times n}(k)$ se escribe de manera única como

$$A = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} E_{ij}$$

$\Rightarrow \{E_{ij}\}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ es una base de $M_{m\times n}(k)$.

3) $\{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ es una base de $k_d[X]$

4) $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de $k[X]$.

Recuerdo: V es finitamente generado $\iff \exists v_1, \dots, v_n \in V$ tq $V = \mathrm{Vect}_k(v_1, \dots, v_n)$.

Teorema: Sea V un k-e.v. finitamente generado.

1) Existen bases de V y todas tienen el mismo cardinal $\dim_k(V)$, llamado la dimensión de V sobre k.

2) De toda familia generadora $\mathcal{F}$ podemos extraer una base, en part. $\mathrm{card}(\mathcal{F}) \geq \dim_k(V)$. Más aún, si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \dim_k(V) \Rightarrow \mathcal{F}$ es una base.

3) Si $\mathcal{F}$ es una familia l.i., entonces $\mathrm{card}(\mathcal{F}) \le \dim_k(V)$. Más aún, si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \dim_k(V) \Rightarrow \mathcal{F}$ es una base.

4) (Teorema de la base incompleta): Toda familia l.i. puede completarse en una base.

5) Todo sub-e.v. $W \subseteq V$ es de dimension finita $\le \dim_k(V)$. Más aún, si $\dim_k(W) = \dim_k(V)$ entonces $W = V$.

Terminología: En adelante, diremos que un k-e.v. es de "dimensión finita" en lugar de "finitamente generado".

Ejemplos: 1) $\dim_k(k^n) = n$

2) $\dim_k(M_{m\times n}(k)) = mn$

3) $\dim_k(k_d[X]) = d+1$

4) $k[X]$ no es de dimensión finita.

Def: Sea $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada de V. Entonces, todo $v \in V$ se escribe de forma única como

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n .$$

Decimos que $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ son las coordenadas de v respecto a $\mathcal{B}$. Así, la elección de una base $\mathcal{B}$ ~~[illegible]~~ provee un isomorfismo

$$\varphi_{\mathcal{B}} : k^n \xrightarrow{\sim} V$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n .$$

⚠ En lo que sigue, todas las bases serán ordenadas.

Prop: Sea $f : V \to W$ lineal. Entonces:

1) Si f inyectiva y $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n) \subseteq V$ es l.i. $\Rightarrow f(\mathcal{F}) \subseteq W$ es l.i.

2) Si f sobreyectiva y $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n) \subseteq V$ generadora $\Rightarrow f(\mathcal{F})$ genera W.

3) Si f biyectiva y $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \subseteq V$ base $\Rightarrow f(\mathcal{B})$ base de W.

En part, $\dim_k(V) = \dim_k(W) = n$.

Dem: 1) Sup. que existe una relación lineal $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$ en W.

f lineal $\Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0 \underset{\substack{f \text{ inyectiva} \\ \& \ f(0)=0}}{\Longrightarrow} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \underset{\mathcal{F} \text{ libre}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ✓

2) Sea $w \in W$. f sobreyectiva $\Rightarrow \exists\, v \in V$ tq $f(v) = w$.

$\mathcal{F}$ genera $V \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ tq $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, de donde obtenemos

$w = f(v) \underset{f \text{ lineal}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \in \mathrm{Vect}_k(f(\mathcal{F}))$ ✓

3) Por 1 y 2, $f(\mathcal{B})$ es libre y generadora, luego una base. En particular,

$\dim_k(V) = \underbrace{\mathrm{card}(\mathcal{B})}_{=n} = \underbrace{\mathrm{card}(f(\mathcal{B}))}_{=n} = \dim_k(W)$ ■

Corolario: 1) Si V es k-e.v. de dimensión finita $\Rightarrow V \cong k^n$, con $n = \dim_k(V)$.

2) Sean V, W dos k-e.v. de dimensión finita. Entonces, $V \cong W \Leftrightarrow \dim_k(V) = \dim_k(W)$.

Dem: 1) Si $\dim_k(V) = n$, la elección de una base $\mathcal{B}$ provee un isomorfismo $\varphi_{\mathcal{B}} : k^n \xrightarrow{\sim} V$. Recíprocamente, si $V \cong k^m$ para cierto $m \Rightarrow \dim_k(V) \underset{\text{Prop 3}}{=} \dim_k(k^m) = m$

$\Rightarrow m = n$ ✓

2) $(\Rightarrow)$ Si $V \cong W$, entonces $\dim_k(V) = \dim_k(W)$ (Prop 3).

$(\Leftarrow)$ Si $\dim_k(V) = \dim_k(W) = n \underset{1}{\Rightarrow} V \cong k^n$ y $W \cong k^n \Rightarrow V \cong W$ ■