MAT210 : "Álgebra lineal"

§0. Notación:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (naturales), $\mathbb{N}^{\geq 1} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Abreviaciones (latín):

- cf : "comparar con"
- eg : "por ejemplo"
- ie : "es decir"

La notación $f : A \hookrightarrow B$ (resp. $f : A \twoheadrightarrow B$) indica que f es una función inyectiva (resp. sobreyectiva).

§1. Espacios vectoriales:

Sea k un cuerpo (eg. $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{F}_p$)

Def: Un k-espacio vectorial (o k-e.v.) es un grupo abeliano $(V, +)$ dotado de una operación externa "multiplicación por escalares"

$$\begin{aligned} k \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \end{aligned}$$

verificando

i) $1 \cdot v = v$ y $\lambda \cdot (\lambda' \cdot v) = (\lambda\lambda') \cdot v$

ii) $(\lambda + \lambda') \cdot v = \lambda v + \lambda' v$ y $\lambda \cdot (v + v') = \lambda v + \lambda v'$

Diremos que los elementos $v \in V$ son vectores y los $\lambda \in k$ son escalares.

Ejemplos: Son k-e.v.:

1) $k^n := \{(x_1, \dots, x_n)$ tq $x_i \in k\}$

2) $M_{m \times n}(k)$ matrices con m-filas y n columnas.

Notación: $M_n(k) := M_{n \times n}(k)$ matrices cuadradas $n \times n$.

3) $k[X]$ anillo de polinomios en una variable X.

Ejercicio Sea V un k-e.v. y sea X un conjunto no-vacío. Probar que

$$W = \{f : X \to V \text{ función}\}$$

es un k-e.v.

Def: Sea V un k-e.v. y $W \subseteq V$ subconjunto. Diremos que W es un sub-e.v. de V si:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 0 \in W \\ 2)\ \text{si } w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W \\ 3)\ \text{si } w \in W \Rightarrow -w \in W \end{array}\right\} \text{"}(W,+) \text{ sub-grupo de } (V,+)\text{"}$$

4) si $w \in W$ y $\lambda \in k \Rightarrow \lambda w \in W$ } "estable por mult. por escalares".

Ejercicio Si $W \subseteq V$ subconj no-vacío. Entonces W es sub-e.v.
$\Leftrightarrow \forall w_1, w_2 \in W$ y $\forall \lambda \in k$ se tiene que $\lambda w_1 + w_2 \in W$.

Ejemplos: 1) Si $1 \leq m \leq n$, entonces $W = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0);\ x_1, \dots, x_m \in k\}$ es un sub-e.v. de $V = k^n$.

2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_3(k)$ es un sub-e.v.

"matrices triangulares superiores"

3) Sea $d \in \mathbb{N}$, entonces $k_d[X] := \{P \in k[X] \text{ tq } gr(P) \leq d\}$ es un sub-e.v. de $k[X]$.

Def: Una función $\varphi : V \to W$ entre dos k-e.v. es una aplicación lineal (u homomorfismo) si preserva la suma y mult. por escalares, ie, si verifica:

i) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \qquad (\Rightarrow \varphi(0_V) = 0_W)$

ii) $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in k$.

Ejercicio: $\varphi : V \to W$ es lineal $\Leftrightarrow \varphi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in k$.

Caso particular importante: si $V = W$, una aplicación lineal $\varphi : V \to V$ es llamada un endomorfismo.

Ejemplos: 1) La derivada (formal) $d : k[X] \longrightarrow k[X]$ dada por

$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \longmapsto P'(X) := n a_n X^{n-1} + \dots + 2a_2 X + a_1$.

es un endomorfismo.

2) $\varphi : k^2 \to k^2$ dada por $\varphi(x,y) = (-x, x+2y)$ es lineal, pero $\psi : k^2 \to k^2$ dada por $\psi(x,y) = (-x, x+2y+1)$ no es lineal.

Def: Una aplicación lineal $\varphi : V \to W$ es un isomorfismo si φ es biyectiva y si $\varphi^{-1} : W \to V$ es lineal.

Lema: Sea $\varphi : V \to W$ lineal biyectiva, entonces $\varphi^{-1} : W \to V$ es lineal.

Dem: Sea $\psi := \varphi^{-1}$. Basta probar que $\psi(\lambda w_1 + w_2) = \lambda \psi(w_1) + \psi(w_2)$ para todos $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in k$.

φ biyectiva $\Rightarrow \exists! v_1, v_2 \in V$ tq $\varphi(v_1) = w_1$ y $\varphi(v_2) = w_2$. $\quad (\Rightarrow \psi(w_i) = v_i)$

φ lineal $\Rightarrow \varphi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \lambda w_1 + w_2 \qquad (*)$

si aplicamos ψ a $(*)$ obtenemos: $\underbrace{(\psi \circ \varphi)}_{id}(\lambda v_1 + v_2) = \psi(\lambda w_1 + w_2)$

$\Rightarrow \psi(\lambda w_1 + w_2) = \lambda v_1 + v_2 = \lambda \psi(w_1) + \psi(w_2)$ ■

Def: Sean V y W dos k-e.v. Decimos que V y W son isomorfos si $\exists\, \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ isomorfismo. Escribiremos $V \cong W$ en este caso.

Ejercicio 1) Probar que $W = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in k^n \text{ tq } x_1, \dots, x_m \in k\} \cong k^m$.

2) Probar que $k_d[X] \cong k^{d+1}$.

3) ¿Es $\varphi : k^2 \to k^2$, $(x,y) \mapsto (-x, x+2y)$ un isomorfismo?