Álgebra Lineal Avanzada

Repaso de 1er año (Parte II)

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

Primer semestre 2025

§4. Aplicaciones lineales y matrices

Matriz de una transformación lineal

Sean V y W dos k-e.v. El k-e.v. de **aplicaciones lineales** de V a W es

$$\mathrm{Hom}_k(V,W) := \{f : V \to W \text{ aplicación lineal}\}.$$

Caso particular: Si $\dim_k(V) = n$ y $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de V, dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ definimos $w_i := \varphi(e_i)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ arbitrario, entonces por linealidad $\varphi(v) = x_1w_1 + \ldots + x_nw_n$, i.e., φ está determinada por los vectores $w_1, \ldots, w_n \in W$.

Sub-caso particular: Si $\dim_k(W) = m$ y $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ base de W, entonces cada $w_j = \varphi(e_j)$ se escribe de manera única como

$$w_j = a_{1j}f_1 + \ldots + a_{mj}f_m$$

Luego, fijando las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, φ está determinada por la matriz

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\varphi) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(k).$$

Teorema

Sea $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de V y $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_m)$ base de W. Entonces:

1. La aplicación lineal $\mathrm{Hom}_k(V, W) \xrightarrow{\cong} M_{m\times n}(k)$, $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\varphi)$ es un isomorfismo.
2. Si $\mathscr{A} = (g_1, \dots, g_p)$ es una base de un tercer k-e.v. U, entonces para todos $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ y $\psi \in \mathrm{Hom}_k(U, V)$ se tiene que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{A}}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{A}}(\psi).$$

Prueba: El ítem 1 es consecuencia de la discusión anterior, mientras que el ítem 2 es razón de la definición de multiplicación de matrices. □

Sea $A \in M_{m\times n}(k)$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ y $(f_1, \dots, f_m)$ son las bases canónicas de k^n y k^m, entonces le asociamos a A la aplicación lineal
$$u_A : k^n \to k^m,\ e_j \mapsto u_A(e_j) := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\},$$
i.e., la j-ésima columna de A es exactamente la imagen de e_j por u_A.

⚠ Si $A \in M_{m\times n}(k)$ y $B \in M_{\ell\times p}$, entonces AB está definido si y sólo si $n = \ell$ y es la matriz asociada a la composición $(u_A \circ u_B) : k^p \to k^m$.

Un caso particular importante del Teorema anterior es el cuando $V = W$ (i.e., $u : V \to V$ es un endomorfismo) y $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ es la misma base:

Teorema

El k-e.v. $M_n(k)$ es una **k-álgebra**, es decir, es un anillo (no conmutativo si $n \geq 2$) compatible con la estructura de k-e.v. Más generalmente, si V es un k-e.v. el espacio de endomorfismos $\mathrm{End}_k(V)$ es una k-álgebra. Luego, si $\dim_k(V) = n$ y $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ es una base de V, la aplicación lineal

$$\mathrm{End}_k(V) \xrightarrow{\cong} M_n(k), \; u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$$

es un isomorfismo de anillos y de k-e.v., i.e., un isomorfismo de k-álgebras.

Sea $A \in M_{m\times n}$ y sea $u_A : k^n \to k^m$ la aplicación lineal asociada. Definimos $\ker(A) := \ker(u_A) \subseteq k^n$, $\mathrm{Im}(A) := \mathrm{Im}(u_A) \subseteq k^m$ y $\mathrm{rg}(A) := \mathrm{rg}(u_A)$.

Observaciones importantes

1. $\mathrm{rg}(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{rg}(u_A) \leq n$ por el Teorema del rango, y $\mathrm{rg}(u_A) \leq m$ pues $\mathrm{Im}(u_A) \subseteq k^m$. Luego, $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$.
2. $\mathrm{Im}(u_A)$ es el sub-e.v. de k^m generado por las columnas de A. Así, $\mathrm{rg}(A)$ es el número máximo de **columnas** de A que son l.i.
3. Veremos que $\mathrm{rg}(A)$ es el número máximo de **filas** de A que son l.i.

Para probar que el rango puede calcularse usando filas, necesitamos de la siguiente definición (y que luego conectaremos con el concepto de **dualidad**):

Sea $A \in M_{m\times n}(k)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

definimos la **matriz transpuesta** de A como

$${}^{\mathrm{t}}A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m},$$

es decir, la j-ésima columna de A corresponde a la j-ésima fila de ${}^{\mathrm{t}}A$. Equivalentemente, $({}^{\mathrm{t}}A)_{ij} = a_{ji}$. En particular, ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) = A$ y ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B \cdot {}^{\mathrm{t}}A$.

§5. Cambios de base

Automorfismos y el grupo $\mathrm{GL}(V)$

Un endomorfismo $f : V \to V$ es un **automorfismo** si es biyectivo, i.e., si existe $f^{-1} : V \to V$ endomorfismo tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V$. De manera similar, una matriz cuadrada $A \in M_n(k)$ es **invertible** si existe $A^{-1} \in M_n(k)$, llamada la **inversa** de A, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}_n$.

Se define el **grupo general lineal** del k-e.v. V como

$$\mathrm{GL}(V) := \{f : V \to V \text{ automorfismo}\},$$

y del mismo modo $\mathrm{GL}_n(k) := \{A \in M_n(k) \text{ invertible}\}$. Así, la elección de una base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V induce un isomorfismo de grupos

$$\mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}_n(k),\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

A pesar de que, en principio, se debe verificar que $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ son la identidad, en el caso de dimensión finita basta verificar una sóla composición:

1. Si V es de dimensión finita y $u, v \in \mathrm{End}_k(V)$ cumplen $u \circ v = \mathrm{Id}_V$, entonces $u, v \in \mathrm{GL}(V)$ y $u = v^{-1}$.
2. Sean $A, B \in M_n(k)$ con $AB = \mathrm{I}_n$, entonces $BA = \mathrm{I}_n$, A, B son invertibles y $B = A^{-1}$.
3. Si A invertible, entonces ${}^{t}A$ es invertible. Además, $({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$.

Prueba: Para 1, notar que $x = u(v(x))$ para todo $x \in V$. Luego, u es sobreyectiva y v es inyectiva. Como $\dim_k(V) < \infty$, u y v son isomorfismos. En particular, $u \circ v = \mathrm{Id}_V$ implica $u^{-1} \circ u \circ v = u^{-1} = v$.

Para 2, sean u_A y u_B los endomorfismos de $V = k^n$ asociados a A y B. Entonces, $AB = \mathrm{I}_n$ implica $u_A \circ u_B = \mathrm{Id}_V$. Por 1, u_A y u_B son isomorfismos y $u_A = u_B^{-1}$. En particular, $B = A^{-1}$ y $BA = \mathrm{I}_n$. Finalmente, 3 se obtiene notando que $AB = BA = \mathrm{I}_n$ implica que ${}^{t}B\,{}^{t}A = {}^{t}A\,{}^{t}B = {}^{t}\mathrm{I}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{I}_n$. □

Construcción explícita de inversas

Supongamos $\dim_k(V) = n$ y sea $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sea $w_i := f(v_i)$. Si $(w_1, \ldots, w_n)$ es una base de $\mathscr{B}$, entonces f es un isomorfismo y su inversa está dado por el endomorfismo $g : V \to V$ definido por $g(w_i) = v_i$.

Prueba: Supongamos que $\mathscr{C} := (w_1, \ldots, w_n)$ es una base de V. Así, todo $w \in V$ se escribe de manera única como $w = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \overset{\text{def}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$. Así, f es sobreyectivo y por ende un isomorfismo (pues $\dim_k(V) < +\infty$).

Por último, basta notar que $(g \circ f)(v_i) = v_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por ende $(g \circ f)(v) = v$ para todo $v \in V$ (pues $\mathscr{B}$ es una base), i.e., $g \circ f = \mathrm{Id}_V$ y por ende $g = f^{-1}$. □

Matriz de cambio de base

Supongamos que $\dim_k(V) = n$ y sean $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ y $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ dos bases de V. Así, existen únicos $p_{ij} \in k$ tales que

$$v_j = p_{1j}e_1 + \ldots + p_{nj}e_n \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Así, consideramos la matriz invertible P que expresa $\mathscr{B}'$ en términos de $\mathscr{B}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(k)$$

llamada **matriz de cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$**, y denotada $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Ejercicio importante

Sea $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$. Verificar que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ y que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_V)$, es decir, podemos visualizar P y P^{-1} como

$$(V, \mathscr{B}') \xrightarrow[P]{\mathrm{Id}_V} (V, \mathscr{B}) \quad \text{y} \quad (V, \mathscr{B}) \xrightarrow[P^{-1}]{\mathrm{Id}_V} (V, \mathscr{B}').$$

Sean $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ y $\mathscr{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ bases de V. Así, para todo $v \in V$

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \quad \text{y} \quad v = x'_1 v_1 + \ldots + x'_n v_n,$$

donde las x_i (resp. x'_i) son las **coordenadas** de v respecto a $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$). Luego, $v \in V$ se representa, respecto a $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$, como el vector columna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n \quad \text{y} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in k^n.$$

Cambio de coordenadas

Con la notación anterior, tenemos que $X = PX'$, donde $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Prueba: Si escribimos $v_j = \sum_{j=1}^n p_{ij} e_i$ y $v \in V$ arbitrario con $v = \sum_{j=1}^n x'_j v_j$, entonces $v = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x'_j p_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) e_i$. Como $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, tenemos al comparar coordenadas que $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j$, i.e., $X = PX'$. $\square$

Teorema (cambio de bases)

Sea $u : V \to W$ aplicación lineal, con $\dim_k(V) = n$ y $\dim_k(W) = m$. Sean $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ bases de V y $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ bases de W. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u) \in M_{m\times n}(k)$ y si $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \in \mathrm{GL}_n(k)$ y $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}') \in \mathrm{GL}_m(k)$ son las matrices de cambio de base, entonces

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}}(u) = Q^{-1}AP$$

Prueba: El diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
(V,\mathscr{B}) \arrow[r, "A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)"] & (W,\mathscr{C}) \arrow[d, "Q^{-1}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}(\mathscr{C})"] \\
(V,\mathscr{B}') \arrow[u, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=P"] \arrow[r, "Q^{-1}AP=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(u)"'] & (W,\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, i.e., $PA = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(u)Q$, i.e., $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}}(u) = Q^{-1}AP$. □

Si $Y = AX$, $X = PX'$ y $Y = QY'$: $Y' = Q^{-1}Y = Q^{-1}AX = (Q^{-1}AP)X'$.

Notación: Sea $0_{p,q} \in M_{p\times q}(k)$ la matriz nula de p filas y q columnas.

Sea $A = M_{m\times n}(k)$ y sea $r = \mathrm{rg}(A)$. Entonces:

1. Existen $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ y $Q \in \mathrm{GL}_m(k)$ tales que
$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$
2. Recíprocamente, **si existen** $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ y $Q \in \mathrm{GL}_m(k)$ tales que
$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_s & 0_{r,n-s} \\ 0_{m-s,s} & 0_{m-s,n-s} \end{pmatrix}.$$
entonces necesariamente se tiene que $s = r \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{rg}(A)$.

Prueba: Sean $(e_1, \dots, e_n)$ y $(f_1, \dots, f_m)$ las bases canónicas de k^n y k^m, y sea $u_A : k^n \to k^m$ la aplicación lineal asociada a A.

Prueba (continuación): Para ❶, consideramos $(w_1, \ldots, w_r) \subseteq k^m$ base de $\mathrm{Im}(u_A)$ y la completamos en una base $\mathscr{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ de k^m.

Sean $v_1 \ldots, v_r \in k^n$ con $u_A(v_j) = w_j$ para todo j, y sea $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ una base de $\ker(u_A)$. Demostrando el Teorema del rango vimos que $\mathscr{B} := (v_1, \ldots, v_r, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ es una base de k^n. Por definición:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u_A) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Dado que $A \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Mat}_{(f_i),(e_j)}(u_A)$, el Teorema de cambio de base implica que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u_A) = Q^{-1}AP$ para P, Q matrices de cambio de base.

Para ❷, la existencia de P, Q matrices invertibles tales que $Q^{-1}AP$ tiene la forma del enunciado, implica que existen bases $(v_1, \ldots, v_n)$ de k^n y $(w_1, \ldots, w_m)$ de k^m tales que $u(v_i) = w_i$ para $i \in \{1, \ldots, s\}$ y $u(v_j) = 0$ para $j \in \{s+1, \ldots, n\}$, i.e., $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}_k(w_1, \ldots, w_s)$ y luego $s = \mathrm{rg}(A)$. □

Decimos que $A, B \in M_{m\times n}(k)$ son **equivalentes** si existen $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ y $Q \in \mathrm{GL}_m(k)$ tales que $Q^{-1}AP = B$. Por el resultado anterior:

$$P \text{ y } Q \text{ son equivalentes} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B).$$

Otra consecuencia importante del resultado anterior es que el rango de una matriz también corresponde al número máximo de **filas** que son l.i.:

Sea $A \in M_{m\times n}(k)$. Entonces, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A)$.

Prueba: Sea $r = \mathrm{rg}(A)$. Por el resultado anterior, existen $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ y $Q \in \mathrm{GL}_m(k)$ matrices de cambio de base tales que

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \quad \text{y luego} \quad {}^{\mathrm{t}}P\,{}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}Q^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que $r = \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A)$ gracias al resultado anterior. $\square$

Un caso particular importante de cambio de base, cuando $V = W$, $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ y $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$ es el siguiente:

Sea $u : V \to V$ endomorfismo, y $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ dos bases de V. Si consideramos $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in M_n(k)$ y $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ entonces

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}AP.$$

Decimos que $A, B \in M_n(k)$ son **semejantes** si existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ tal que $P^{-1}AP = B$, es decir, si A y B representan (en bases diferentes) el mismo endomorfismo de k^n.

⚠ Veremos que la relación de semejanza es **mucho más sutil** que aquella dada por el rango (equivalencia). Esto último será la motivación principal para estudiar **diagonalización** de endomorfismos durante el curso.

§6. Operaciones elementales sobre filas y columnas

Operaciones elementales (columnas)

Sea $A \in M_{m\times n}(k)$, y sean $(e_1, \ldots, e_n)$ y $(f_1, \ldots, f_m)$ las bases canónicas de k^n y k^m. Consideremos las **operaciones elementales** dadas por:

1. **Intercambiar columnas C_i y C_j de A** $\Leftrightarrow$ $A \mapsto A \cdot P(i,j)$ donde $P(i,j)$ es la **matriz de permutación asociada** al automorfismo de k^n dado por $e_i \mapsto e_j$, $e_j \mapsto e_i$ y $e_\ell \mapsto e_\ell$ para todo $\ell \neq i, j$. E.g.
$$P(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(k).$$
2. **Multiplicar C_j por $\lambda_j \neq 0$** $\Leftrightarrow$ $A \mapsto A \cdot D_j(\lambda_j)$ con $D_j(\lambda_j) \in \mathrm{GL}_n(k)$ matriz diagonal con coeficiente $d_{ii} = 1$ para $i \neq j$ y con $d_{jj} = \lambda_j$.
3. **Sumar λC_i a C_j $(i \neq j)$** $\Leftrightarrow$ $A \mapsto A \cdot B_{ij}(\lambda)$ con $B_{ij}(\lambda) := \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$, i.e., sumamos λ a I_n en la i-ésima fila y j-ésima columna:
$$B_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(k)$$

Operaciones columna determinan **bases** para $\mathrm{Im}(A)$ y $\ker(A)$.

Realizando operaciones elementales sobre columnas obtenemos una matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & * & & 1 & \vdots & & \vdots \\ * & * & & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde las columnas $C'_j = 0$ si $j > r$ y donde $C'_1, \ldots, C'_r \in k^m$ son l.i., i.e., $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A') = \mathrm{Vect}_k(C'_1, \ldots, C'_r)$ y luego $r = \mathrm{rg}(A)$.

La matriz A' cumple $A' = AP$ donde $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ corresponde a las operaciones elementales efectuadas. Como $\ker(A') \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Vect}_k(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ y $A' = AP$, $\ker(A) = \mathrm{Vect}_k(P_{r+1}, \ldots, P_n)$ está dado por el espacio generado por las últimas $(n-r)$ columnas de P.

Ejemplo concreto

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 8 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Realizando operaciones columna

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 8 & 15 & 16 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4\mapsto C_4-4C_1]{\substack{C_2\mapsto C_2-2C_1 \\ C_3\mapsto C_3-3C_1}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4\mapsto C_4-2C_2]{C_3\mapsto C_3-3C_2} \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A'} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \end{array}\right)$$

obtenemos $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,1,3),(0,1,2))$ (primeras columnas de A') y que $\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((3,-3,1,0),(0,-2,0,1))$ (últimas columnas de P').

Sea $A \in M_{m\times n}(k)$ y consideremos las operaciones elementales por filas:

1. **Intercambiar filas F_i y F_j de A** $\Leftrightarrow A \mapsto P(i,j)\cdot A$.
2. **Multiplicar F_j por $\lambda_j \neq 0$** $\Leftrightarrow A \mapsto D_j(\lambda_j)\cdot A$ con $D_j(\lambda_j) \in \mathrm{GL}_n(k)$ matriz diagonal con coeficiente $d_{ii} = 1$ para $i \neq j$ y con $d_{jj} = \lambda_j$.
3. **Sumar λF_i a F_j $(i \neq j)$** $\Leftrightarrow A \mapsto B_{ji}(\lambda)\cdot A$ con $B_{ji}(\lambda) := \mathrm{I}_n + \lambda E_{ji}$.

Operaciones fila determinan **ecuaciones** para $\mathrm{Im}(A)$ y $\ker(A)$.

Realizando operaciones elementales sobre filas obtenemos una matriz

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde las filas $F''_j = 0$ si $j > r$ y donde $F''_1, \ldots, F''_r \in k^n$ son l.i.

La matriz A'' cumple $A'' = QA$ donde $Q \in \mathrm{GL}_m(k)$ corresponde a las operaciones elementales efectuadas, con $\ker(A) = \ker(A'')$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A'')$.

Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in k^n$, el sistema lineal $A''\mathbf{x} = 0$ provee ecuaciones para $\ker(A)$, y si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in k^m$ entonces $\mathbf{y}'' := Q\mathbf{y}$ cumple que $y''_{r+1} = \cdots = y''_n = 0$ son ecuaciones para $\mathrm{Im}(A)$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 8 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ la matriz del ejemplo anterior.

Realizando las operaciones fila $F_2 \mapsto F_2 - F_1$, $F_3 \mapsto F_3 - 3F_1$ y $F_3 \mapsto F_3 - 2F_2$ obtenemos (Ejercicio)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & y_1 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & y_2 \\ 3 & 8 & 15 & 16 & y_3 \end{array}\right) \longmapsto \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A''} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 - 2y_2 \end{array}}_{\mathbf{y}''}\right).$$

Luego, obtenemos las ecuaciones

$$\ker(A) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

y $\mathrm{Im}(A) = \{y_3'' = 0\} \overset{\text{def}}{=} \{y_3 - y_1 - 2y_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Tal como se aprendió en primer año, el proceso de reducción de columnas (resp. filas) permite calcular A^{-1} si $A \in \mathrm{GL}_n(k)$:

En el caso en que $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ la etapa final de la reducción se lee como $A' = AP = \mathrm{I}_n$ (resp. $A'' = QA = \mathrm{I}_n$) y luego $P = A^{-1}$ (resp. $Q = A^{-1}$).

⚠ Es **muy importante** elegir si hacemos operaciones sobre columnas o sobre filas, pero **no mezclarlas**.

De hecho, el siguiente ejercicio muestra que las únicas matrices para las cuales podemos hacer esto son los múltiplos de la matriz identidad:

Ejercicio: Sea $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ y supongamos que $AB = BA$ para toda $B \in \mathrm{GL}_n(k)$. Probar que $A = \lambda\,\mathrm{I}_n$ para cierto $\lambda \neq 0$.

§7. Polinomios de endomorfismos

Sea V un k-e.v. y sea $u : V \to V$ un endomorfismo.

Notación: $u^0 := \mathrm{Id}_V$, $u^1 := u$, $u^2 := u \circ u, \ldots, u^n := u \circ \overbrace{\cdots}^{n \text{ veces}} \circ u$. Más generalmente, si $P \in k[X]$ está dado por $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d$, entonces definimos

$$P(u) := a_0 \mathrm{Id}_V + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_d u^d \in \mathrm{End}_k(V).$$

Por definición de multiplicación de polinomios y composición de funciones:

La aplicación

$$k[X] \to \mathrm{End}_k(V),\ P \mapsto P(u)$$

es un **morfismo de k-álgebras**, i.e., es k-lineal y si $P, Q \in k[X]$ entonces $PQ \mapsto P(u) \circ Q(u)$.

La construcción anterior funciona del mismo modo para $A \in M_n(k)$, donde $P(A) := a_0 \mathrm{I}_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_d A^d \in M_n(k)$.

Polinomio aplicado a un endomorfismo

Ejemplo: Sea $P(X) = X^4 - 1$ en $k[X]$, y sea $u : V \to V$ un endomorfismo.

1. Si $k = \mathbb{R}$, $P(X) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$ y luego
$$P(u) = (u - \mathrm{Id}_V) \circ (u + \mathrm{Id}_V) \circ (u^2 + \mathrm{Id}_V).$$
2. Si $k = \mathbb{C}$, $P(X) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ y luego
$$P(u) = (u - \mathrm{Id}_V) \circ (u + \mathrm{Id}_V) \circ (u - i\,\mathrm{Id}_V) \circ (u + i\,\mathrm{Id}_V).$$

Sea $u : V \to V$ endomorfismo tal que $\dim_k(V) = n$ es finita. Entonces, existe $P \in k[X]$ tal que $P \neq 0$ y $P(u) = 0$.

Prueba: Como $\mathrm{End}_k(V) \cong M_n(k) \cong k^{n^2}$ tiene dimensión n^2, los n^2+1 vectores Id_V, u, u^2, $\ldots, u^{n^2}$ de $\mathrm{End}_k(V)$ son l.d., i.e., existen $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in k$ no todos nulos tales que $a_0\,\mathrm{Id}_V + a_1 u + \ldots + a_{n^2} u^{n^2} = 0$ en $\mathrm{End}_k(V)$. Así, basta escoger $P(X) := a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n^2} X^{n^2} \in k[X] \smallsetminus \{0\}$. $\square$