Álgebra Lineal Avanzada

Repaso de 1er año (Parte I)

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

Primer semestre 2025

§0. Notación

Durante todo el curso denotaremos

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{y} \quad \mathbb{N}^{\geq 1} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \ldots\}$$

además de las notaciones estándar $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$ (p primo), etc.

Usaremos las siguientes abreviaciones:

- **cf.** (*confer*): "comparar con".
- **e.g.** (*exempli gratia*): "por ejemplo".
- **i.e.** (*id est*): "es decir".

La notacion $f : A \hookrightarrow B$ (resp. $f : A \twoheadrightarrow B$) indica que f es una función inyectiva (resp. sobreyectiva).

§1. Espacios vectoriales

Sea k un cuerpo (e.g. $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$, etc).

Un k-**espacio vectorial** (k-e.v.) es un grupo abeliano $(V, +)$ dotado de una operación externa llamada *multiplicación por escalares*

$$k \times V \longrightarrow V,\ (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v \overset{\text{def}}{=} \lambda v$$

verificando

1. $1 \cdot v = v$ y $\lambda \cdot (\lambda' \cdot v) = (\lambda\lambda') \cdot v$,
2. $(\lambda + \lambda') \cdot v = \lambda \cdot v + \lambda' \cdot v$ y $\lambda \cdot (v + v') = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v'$.

Decimos que $v \in V$ es un **vector** y que $\lambda \in k$ es un **escalar**.

Los ejemplos más típicos de k-espacios vectoriales son:

1. $k^n \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n)$ tal que cada $x_i \in k\}$.
2. $M_{m\times n}(k)$ matrices de m filas y n columnas. E.g. $M_n(k) := M_{n\times n}(k)$.
3. $k[X]$ anillo de polinomios en una variable X.

SUB-ESPACIOS VECTORIALES DE V, UN k-E.V.

Un subconjunto $W \subseteq V$ es un **sub-espacio vectorial** (sub-e.v.) de V si:

1. $(W, +)$ es un subgrupo de $(V, +)$, es decir:
   (a) $0 \in W$.
   (b) Si $w_1, w_2 \in W$, entonces $w_1 + w_2 \in W$.
   (c) Si $w \in W$, entonces $-w \in W$.
2. W es estable por multiplicación por escalares, es decir:
   (d) Si $w \in W$ y $\lambda \in k$, entonces $\lambda w \in W$.

Ejercicio: Sea $W \subseteq V$ subconjunto no-vacío. Pruebe que W es un sub-e.v. si y sólo si $\forall w_1, w_2 \in W$ y $\forall \lambda \in k$ se tiene que $\lambda w_1 + w_2 \in W$.

Por ejemplo:

1. Si $1 \leq m \leq n$, entonces $W := \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),\ x_1, \ldots, x_m \in k\}$ es un sub-e.v. de $V = k^n$.
2. Sea $d \in \mathbb{N}$, entonces $k_d[X] := \{P \in k[X],\ \mathrm{gr}(P) \leq d\}$ es un sub-e.v. de $V = k[X]$.

Una función $\varphi : V \to W$ entre dos k-e.v. es una **aplicación lineal** si preserva la suma y multiplicación por escalares, es decir:

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ para todos $v_1, v_2 \in V$. Así, $\varphi(0_V) = 0_W$.
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ para todos $v \in V$ y $\lambda \in k$.

En el caso particular en que $V = W$, una aplicación lineal $\varphi : V \to V$ es llamada un **endomorfismo** de V.

Ejercicio: Demuestre que una función $\varphi : V \to W$ es lineal si y sólo si $\varphi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda\varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ para todos $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in k$.

Por ejemplo:

1. La **derivada** (formal) $d : k[X] \to k[X]$, $P \mapsto P'$, donde se **define** $P(X) = a_n X^n + \ldots a_1 X + a_0 \mapsto P'(X) := n a_n X^{n-1} + \ldots + 2a_2 X + a_1$, es un endomorfismo de $k[X]$.
2. La función $\varphi : k^2 \to k^2$, $(x, y) \mapsto (-x, x + 2y)$ es lineal, pero la función $\psi : k^2 \to k^2$, $(x, y) \mapsto (-x, x + 2y + 1)$ **no es** lineal.

Espacios vectoriales isomorfos

Decimos que $\varphi : V \to W$ lineal es un **isomorfismo** si φ es biyectiva y $\varphi^{-1} : W \to V$ es lineal. Además, decimos que V y W son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos, y en tal caso escribimos $V \cong W$.

Lema útil

Si $\varphi : V \to W$ es lineal biyectiva, $\varphi^{-1} : W \to V$ es automáticamente lineal.

Prueba: Sea $\psi := \varphi^{-1}$, y sean $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in k$ arbitrarios. Como φ biyectiva, $\exists!\ v_1, v_2 \in V$ con $\varphi(v_i) = w_i$. Así, dado que φ es lineal

$$\varphi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda\varphi(v_1) + \varphi(v_2) \overset{\text{def}}{=} \lambda w_1 + w_2. \quad (\star)$$

Aplicando $\varphi^{-1} \overset{\text{def}}{=} \psi$ a $(\star)$, y recordando que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$, obtenemos

$$\psi(\lambda w_1 + w_2) = (\psi \circ \varphi)(\lambda v_1 + v_2) = \lambda v_1 + v_2 \overset{\text{def}}{=} \lambda\psi(w_1) + \psi(w_2),$$

pues $\varphi(v_i) = w_i$ equivale a $\psi(w_i) = v_i$. Así, $\psi : W \to V$ es lineal. $\square$

Ejercicio: Pruebe que $k_d[X] \cong k^{d+1}$ para todo $d \in \mathbb{N}$.

§2. Familias generadoras, libres, bases y dimensión

Sub-espacio vectorial generado por $S \subseteq V$

Sea V un k-e.v. y sea $S \subseteq V$ un sub-conjunto no-vacío.

Se define el **sub-e.v. generado por** S como[a]

$$\mathrm{Vect}_k(S) := \{\lambda_1 v_1 + \ldots, \lambda_r v_r \text{ donde } r \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ v_i \in S \text{ y } \lambda_i \in k\},$$

es decir, el conjunto formado por todas las combinaciones lineales **finitas** de elementos de S (es decir, el sub-e.v. más pequeño de V que contiene a S).

[a]En inglés, $\mathrm{Vect}_k(S)$ se escribe $\mathrm{Span}_k(S)$ o símplemente $\mathrm{Span}(S)$.

Convención y Notación

1. Es común definir $\mathrm{Vect}_k(\varnothing) := \{0\}$.
2. Si $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ conjunto **finito**, escribimos $\mathrm{Vect}_k(v_1, \ldots, v_r)$.

Por ejemplo, si $S = \{v\}$ consiste en un único vector entonces

$$\mathrm{Vect}_k(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Vect}_k(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda v,\ \lambda \in k\}$$

es el sub-e.v. dado por todos los múltiplos del vector $v \in V$.

Un sub-conjunto $S \subseteq V$ es una **familia generadora** si $V = \mathrm{Vect}_k(S)$, i.e., todo elemento de V es combinación lineal de elementos de S.

Decimos que V es **finitamente generado** si existe un conjunto **finito** $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $V = \mathrm{Vect}_k(v_1, \dots, v_n)$.

⚠ Toda familia conteniendo una familia generadora es generadora.

Ejemplos:

1. k^n está generado por los vectores

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0),\ e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots,\ e_n := (0, \dots, 0, 1).$$

2. Los monomios $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ generan $k[X]$, ya que todo polinomio $P \in k[X]$ se escribe de manera única como una combinación lineal **finita** $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$.

Los elementos de $S \subseteq V$ son **linealmente independientes** (l.i.) y que $S \subseteq V$ es una **familia libre** si

> *Para todos $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $v_1 \ldots, v_r \in S$ distintos, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ se tiene que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$ implica $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.*

Sino, los elementos de S son **linealmente dependientes** (l.d.): $\exists r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\exists\, v_1, \ldots, v_r \in S$ distintos y $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ **no todos nulos** tales que se verifica $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$ (y luego $v_i = \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j$ si $\lambda_i \neq 0$).

1. Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ **finito**, los $v_1, \ldots, v_n \in V$ son l.i. si para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ implica $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
2. Si $T \subseteq S \subseteq V$, entonces S libre implica T libre, y T l.d. implica S l.d.
3. Si $0 \in S$ entonces S es l.d.

Por ejemplo, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en k^n es l.i. pues $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n \overset{\text{def}}{=} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$ implica que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Bases

Una familia $\mathscr{B} = \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ es una **base** de V si todo $v \in V$ se escribe de manera única como combinación lineal de los v_i, i.e., si

1. $\mathscr{B}$ es una familia generadora, y
2. $\mathscr{B}$ es una familia libre.

En particular, $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V si: para todo vector $v \in V$, existe un único $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$ tal que $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Ejemplos importantes:

1. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en k^n es llamada la **base canónica**.
2. La **matriz elemental** $E_{ij} \in M_{m\times n}(k)$ es la matriz con sus coeficientes 0 excepto en la fila i y la columna j, donde vale 1. Toda $A \in M_{m\times n}(k)$ se escribe de manera única como $A = \sum_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} a_{ij} E_{ij}$, es decir, $\{E_{ij}\}_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$ es una **base** de $M_{m\times n}(k)$.
3. $\{1, X, X^2, \ldots, X^d\}$ es una base de $k_d[X]$.
4. $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $k[X]$.

Si $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ es una base **ordenada** de V, entonces todo $v \in V$ se escribe de forma única como

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n,$$

y decimos que $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ son las **coordenadas** de v respecto a $\mathscr{B}$.

Así, la elección de una base ordenada $\mathscr{B}$ nos da un isomorfismo

$$\varphi_{\mathscr{B}} : k^n \xrightarrow{\cong} V,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

⚠ En lo que sigue, todas las bases serán ordenadas.

Observación: Intuitivamente, el entero $n \in \mathbb{N}$ mide los "grados de libertad" que tenemos en V cuando es un k-e.v. finitamente generado. Esto se formaliza en el concepto de *dimensión*, discutido en primer año:

Teorema (click aquí para ver su demostración)

Sea V un k-e.v. **finitamente generado**. Entonces:

1. Existen bases de V, y todas tienen *el mismo* cardinal $\dim_k(V)$, llamado la **dimensión** de V sobre k.
2. De toda familia generadora $\mathscr{F} \subseteq V$ podemos extraer una base. En particular, $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geq \dim_k(V)$. Más aún, si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim_k(V)$ entonces $\mathscr{F}$ es una base.
3. Si $\mathscr{F} \subseteq V$ es una familia l.i., entonces $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leq \dim_k(V)$. Más aún, si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim_k(V)$ entonces $\mathscr{F}$ es una base.
4. Toda familia l.i. puede completarse en una base.
5. Todo sub-e.v. $W \subseteq V$ es de dimensión finita $\leq \dim_k(V)$. Más aún, si $\dim_k(W) = \dim_k(V)$ entonces $W = V$.

⚠ En todo lo que sigue, diremos que un k-e.v. es de **dimensión finita** en lugar de que es finitamente generado.

Sea $f : V \to W$ aplicación lineal y sea $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n) \subseteq V$. Entonces:

1. Si f inyectiva y $\mathscr{F}$ es l.i., $f(\mathscr{F}) \subseteq W$ es l.i.
2. Si f sobreyectiva y $\mathscr{F}$ es generadora, $f(\mathscr{F}) \subseteq W$ es generadora.
3. Si f biyectiva y $\mathscr{F}$ es una base, $f(\mathscr{F}) \subseteq W$ es una base. Así, $\dim_k(V) = \dim_k(W) = n$ en este caso.

Prueba: Para 1 supongamos que $\lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0$ en W, i.e., $f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = 0$ pues f lineal. Como f inyectiva y $f(0) = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ en V y así $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ pues $\mathscr{F}$ es l.i.

Para 2, sea $w \in W$ arbitrario y sea $v \in V$ tal que $f(v) = w$ (f sobreyectiva). Como $\mathscr{F}$ genera V, $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ para ciertos $\lambda_i \in k$. Así, tenemos que $w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) \in \mathrm{Vect}_k(f(\mathscr{F}))$.

Para 3, tenemos que $f(\mathscr{F})$ es libre y generadora por 1 y 2, y luego una base. Además, $\dim_k(V) = \mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \mathrm{Card}(f(\mathscr{F})) = \dim_k(W)$. $\square$

Sean V, W dos k-e.v. de dimensión finita. Entonces:

1. $V \cong k^n$, donde $n = \dim_k(V)$.
2. $V \cong W$ si y sólo si $\dim_k(V) = \dim_k(W)$.

Prueba: Para 1, si $n = \dim_k(V)$ entonces la elección de una base $\mathscr{B} \subseteq V$ provee un isomorfismo $\varphi_{\mathscr{B}} : k^n \xrightarrow{\cong} V$. Recíprocamente, si $f : k^n \xrightarrow{\cong} V$ es un isomorfismo, entonces por el resultado anterior $n \overset{\text{def}}{=} \dim_k(k^n) = \dim_k(V)$.

Para 2 se procede de manera análoga:

($\Rightarrow$) Si $V \cong W$ entonces $\dim_k(V) = \dim_k(W)$ por el resultado anterior.

($\Leftarrow$) Si $\dim_k(V) = \dim_k(W) = n$, $V \cong k^n$ y $W \cong k^n$ por 1, y luego $V \cong W$.

Así, los k-e.v. de dimensión finita están caracterizados por su dimensión. □

Ejemplos:

1. $\dim_k(M_{m\times n}(k)) = mn$. En particular, $M_{m\times n}(k) \cong k^{mn}$.
2. $\dim_k(k_d[X]) = d + 1$. En particular, $k_d[X] \cong k^{d+1}$.

§3. Núcleo, imagen y Teorema del rango

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se define:

1. El **kernel** (o núcleo) de f es el sub-e.v. dado por
$$\ker(f) := \{v \in V,\ f(v) = 0\} \subseteq V.$$
Por linealidad, f es inyectiva si y sólo si $\ker(f) = \{0\}$.
2. La **imagen** de f es el sub-e.v. dado por
$$\mathrm{Im}(f) := f(V) \overset{\text{def}}{=} \{f(v),\ v \in V\} \subseteq W.$$
En particular, f es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(f) = W$.
3. Si $\mathrm{Im}(f)$ es de dimensión finita $r \in \mathbb{N}$ (e.g. si V o W son de dimensión finita), $r = \dim_k \mathrm{Im}(f)$ es llamado el **rango** de f, denotado $\mathrm{rg}(f)$.

Teorema del rango

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Si V es de dimensión **finita**, entonces

$$\dim_k(V) = \dim_k \ker(f) + \mathrm{rg}(f).$$

En particular, f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \dim_k(W) = \dim_k(V) - \dim_k \ker(f)$.

Prueba: Sea $n := \dim_k(V) < +\infty$ y $d := \dim_k \ker(f)$, donde $d < +\infty$ y $d \leq n$. Sea $\mathscr{K} = (e_1, \ldots, e_d)$ una base de $\ker(f)$. Como $\mathrm{Im}(f)$ está generada por n vectores (imagen de una base de V), $r := \mathrm{rg}(f) \overset{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{Im}(f) \leq n$. Sea $(w_1, \ldots, w_r)$ base de $\mathrm{Im}(f)$ y sea $v_i \in V$ tal que $f(v_i) = w_i$ para $i \in \{1, \ldots, r\}$. Veamos que $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_d, w_1, \ldots, w_r)$ es una base de V:

$\mathscr{B}$ **genera** V: Si $v \in V$, $f(v) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r \overset{\text{def}}{=} f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r)$ y luego $v - \lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_r v_r = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_d e_d \in \ker(f)$, i.e., $v \in \mathrm{Vect}_k(\mathscr{B})$.

$\mathscr{B}$ **es l.i.**: Si $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_d e_d = 0$ entonces $0 = f(0) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r$ y luego $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ pues $(w_1, \ldots, w_r)$ es l.i. Así, $\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_d e_d = 0$ y luego $\mu_1 = \ldots = \mu_d = 0$ pues $(e_1, \ldots, e_d)$ es l.i.

Concluímos así que $\dim_k(V) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = d + r \overset{\text{def}}{=} \dim_k \ker(f) + \mathrm{rg}(f)$. $\square$

Observación: Intuitivamente, el Teorema del rango se visualiza pensando que los vectores de V (donde hay $\dim_k(V)$ grados de libertad) se dividen en aquellos que son enviados a $0 \in W$ por f (donde hay $\dim_k \ker(f)$ grados de libertad) y aquellos que son enviados a vectores no-nulos en W por f (donde hay $\mathrm{rg}(f)$ grados de libertad), i.e., $\dim_k(V) = \dim_k \ker(f) + \mathrm{rg}(f)$.

Sea $f : V \to W$ aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión **finita** tales que $\dim_k(V) = \dim_k(W)$. Entonces, son equivalentes:

1. f es biyectiva (i.e., f es un isomorfismo).
2. f es inyectiva.
3. f es sobreyectiva.

Prueba: 1 implica 2 y 3. Si f es inyectiva (resp. sobreyectiva) entonces $\ker(f) = \{0\}$ (resp. $\mathrm{Im}(f) = W$) y luego $\dim_k \ker(f) = 0$ (resp. $\mathrm{rg}(f) = \dim_k(W) = \dim_k(V)$). Por el Teorema del rango, $\mathrm{rg}(f) = \dim_k(V) = \dim_k(W)$, i.e., f sobreyectiva (resp. $0 = \dim_k \ker(f)$, i.e., f inyectiva). $\square$