Quiz 3 MAT210

Nombre y apellido : ____

ROL : ____

INSTRUCCIONES GENERALES:

- La evaluación comenzará a las 14:00 horas del día Viernes 31 de Julio de 2020 y debe ser entregada a más tardar a las 19:00 horas del día Viernes 31 de Julio de 2020.
- Lea cuidadosamente cada una de las preguntas y responda justificando de forma clara, <u>concisa</u> y ordenada.
- Se pueden utilizar los apuntes del curso durante la evaluación. Es importante destacar que sólo se supondrán conocidas las nociones allí vistas, y todo argumento utilizando resultados adicionales (no justificados) no será considerado.
- Pruebas donde se detecte copia, plagio de respuestas en Internet, utilización de software para efectuar cálculos, y/o cualquier situación de fraude académico serán calificadas con nota cero. En particular, todas las respuestas deben desarrollarse **usando la notación del curso**. Cabe destacar que AULA cuenta con un sistema de detección de plagio.
- La evaluación debe ser enviada a través de la plataforma AULA en un **único** archivo PDF, el cual debe contener la resolución de la evaluación, la cual debe estar escrita a mano. Adicionalmente, el archivo debe tener por nombre `Q3_MAT210_Apellido_Nombre.pdf`.
- Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.

Problema 1 (50 puntos)

El objetivo de este problema es analizar una forma cuadrática real específica y describir el lugar geométrico que define.

En el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$ de coordenadas (x,y,z) respecto a la base canónica $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$, consideremos la forma cuadrática real $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(x,y,z) = -x^2 + 3z^2 + 6xz - 4yz.$$

(a) **[20 pts]** Determinar la matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ de Q respecto a la base canónica $\mathscr{C}$ y describir la única forma bilineal simétrica $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ asociada a Q.

(b) **[20 pts]** Utilizando el método de reducción de Gauss, determinar una descomposición de Q como suma de cuadrados de formas lineales independientes. Deducir el rango y la signatura de Q.

(c) **[10 pts]** Deducir la naturaleza geométrica[1] de la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x,y,z) = 1\}.$$

Solución:

(a) La matriz A de Q en la base canónica está dada por

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En particular, deducimos[2] que la forma bilineal simétrica asociada a Q está dada por

$$B((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = -x_1x_2 + 3z_1z_2 + 3x_1z_2 + 3x_2z_1 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1.$$

(b) El método de reducción de Gauss da

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= -(x^2 - 6xz) + 3z^2 - 4yz = -(x-3z)^2 + 12z^2 - 4yz = -(x-3z)^2 + 12\left(z^2 - \frac{1}{3}yz\right) \\ &= -(x-3z)^2 + 12\left(z - \frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{1}{3}y^2. \end{aligned}$$

Obtenemos así una descomposición de Q como suma de cuadrados de formas lineales independientes

$$Q = -f_1^2 + 12f_2^2 - \frac{1}{3}f_3^2,$$

donde $f_1(x,y,z) = x - 3z$, $f_2(x,y,z) = z - \frac{1}{6}y$ y $f_3(x,y,z) = y$. En particular, Q es de signatura $(1,2)$ y de rango 3 (no-denegerada).

(c) La superficie cuádrica S es centrada pues Q es una cuádrica no-degenerada. Sea $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ dada por[3] la base (pre-)dual de la base (f_1, f_2, f_3) de $(\mathbb{R}^3)^*$. Entonces, si (X,Y,Z) son coordenadas respecto a $\mathscr{B}$, entonces

$$Q(X,Y,Z) = -X^2 + 12Y^2 - \frac{1}{3}Z^2$$

es la ecuación reducida de Q. En particular, la cuádrica S dada por $Q(X,Y,Z) = 1$ es suave, pues el término constante $c = 1$ es no-nulo. Finalmente, dado que la signatura de Q es $(1,2)$ se trata de un hiperboloide de dos hojas.

[1] Es decir, determinar si es una cuádrica suave o singular, centrada o no, y (si corresponde) determinar si es un elipsoide o un hiperboloide de una o dos hojas. **¡Atención!** **<u>No</u>** se pide calcular los ejes ni el centro de $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

[2] Alternativamente, puede usarse la fórmula de polarización para calcular B y a partir de B deducir A.

[3] En este problema en particular, no es necesario calcularla: basta con usar la existencia.

Problema 2 (50 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar una isometría del espacio euclideano orientado $\mathbb{R}^3$.

Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) **[10 pts]** Demostrar que A es una matriz ortogonal de determinante 1, i.e., $A \in \mathbf{SO}(3)$.

(b) **[20 pts]** Probar que A es una matriz de rotación y determinar el eje $L \subseteq \mathbb{R}^3$ de rotación.

(c) **[20 pts]** Determinar la ecuación del plano ortogonal $\Pi = L^\perp$ y el ángulo de rotación $\theta \in -]\pi, \pi]$ de A.

Solución:

(a) Sean $v_1 = (\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{4}{9})$, $v_2 = (-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ y $v_3 = (\frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9})$ las columnas de A. Entonces,

$$\|v_1\|^2 = \|v_3\|^2 = \frac{1}{81}(1 + 64 + 16) = 1 \quad \text{y} \quad \|v_2\|^2 = \frac{1}{81}(16 + 16 + 49) = 1.$$

Además, $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = 0$. Luego, $A \in \mathbf{O}(3)$ es una matriz ortogonal y luego $\det(A) = \pm 1$. Notar que $v_1 \times v_2 = v_3$ (resp. $v_1 \times v_2 = -v_3$) si y sólo si $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ es una base directa (resp. indirecta) de $\mathbb{R}^3$, lo que equivale a su vez a que $\det(A) = 1$ (resp. $\det(A) = -1$). Para verificar el signo de $\pm v_3$ en $v_1 \times v_2$ basta calcular una coordenada. Por ejemplo, la primera coordenada de $v_1 \times v_2$ es

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{vmatrix} = \frac{1}{81}(56 - (-16)) = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}.$$

Luego[4], $\det(A) = 1$ y por ende $A \in \mathbf{SO}(3)$.

(b) Notamos que $\operatorname{tr}(A) = 1 < 3$, por lo que $A \in \mathbf{SO}(3)$ es una rotación. El eje de rotación está dado por el espacio propio $V_1 = \ker(A - \mathrm{I}_3)$ que calculamos resolviendo el sistema

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ 8 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Haciendo operaciones columna[5], obtenemos que $e = (1, 2, 2)$ es un vector director de la recta L.

(c) El plano ortogonal $\Pi = L^\perp$ está dado por la ecuación $\langle (x, y, z), (1, 2, 2)\rangle = x + 2y + 2z = 0$. Si orientamos la recta L usando el vector director $e = (1, 2, 2)$, entonces el ángulo de rotación $\theta \in] - \pi, \pi]$ verifica $\operatorname{tr}(A) = 1 = 2\cos(\theta) + 1$, i.e., $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Por otra parte, $\sin(\theta)$ tiene el mismo signo de $\det_{\mathscr{C}}(e, e_1, Ae_1)$, donde $\mathscr{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$ es un vector fuera del eje L y $Ae_1 = v_1 = (\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{4}{9})$. Así, desarrollando a lo largo de la primera columna del determinante

$$\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(0 + (-2)(-4) + 2 \cdot 8) = \frac{24}{9} > 0,$$

de donde concluímos[6] que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

[4] Alternativamente, se puede calcular que ${}^{t}AA = \mathrm{I}_3$ y $\det(A) = 1$, pero hacerlo geométricamente es mucho más rápido.
[5] O símplemente reemplazando $x = 1$ y resolviendo el sistema 2×2 dado por $-4y + 8z = 8$, $-5y + z = -8$.
[6] Si hubiesemos elegido orientar a L usando un múltiplo positivo de $-e$, obtendríamos $\theta = -\frac{\pi}{2}$.