Pauta Quiz 2 – Álgebra Lineal Avanzada (MAT210, 2025-1)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Madeline Castro

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Nombre y Apellido: **ROL USM:**

Problema 1 (100 puntos)

Considere la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Puede usar directamente, sin demostración, el hecho que $\lambda = 2$ es un valor propio de A.

(a) (**15 pts**) Determine el polinomio característico de A, ¿es A trigonalizable sobre $\mathbb{R}$?

(b) (**15 pts**) Determine bases para los espacios propios de A.

(c) (**20 pts**) Determine el polinomio minimal de A, ¿es A diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

(d) (**20 pts**) Determine una base de vectores propios generalizados de A para $\mathbb{R}^3$.

(e) (**30 pts**) En caso de existir, determine la descomposición de Dunford $A = S + N$, con S diagonalizable y N nilpotente.

Solución:

(a) Desarrollando la última columna, calculamos

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 5 & X-4 & -1 \\ 2 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (X-2)\begin{vmatrix} X & -1 \\ 5 & X-4 \end{vmatrix} = -(X-2) + (X-2)(X^2-4X+5)$$

y así[1] $P_A(X) = (X-2)^3$. Como $P_A(X)$ escinde sobre $\mathbb{R}$, la matriz A es trigonalizable.

(b) Para determinar $V_2 = \ker(B)$, con $B := A - 2I_3$, calculamos

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 2x,\ z = 5x - 2y = x$$

y así $(x,y,z) = (x,2x,x) = x(1,2,1)$, i.e., $V_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,2,1))$.

(c) Calculamos que

$$B^2 = (A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y que } B^3 = (A-2I_3)^3 = 0$$

Luego, $m_A(X) = (X-2)^3$ y por ende A **no** es diagonalizable, pues m_A no posee raíces simples[2].

(d) Por definición, $V_{(2)} = \ker\left[(A-2I_3)^3\right] = \mathbb{R}^3$ pues $(A-2I_3)^3 = 0$. Así, **cualquier**[3] base de $\mathbb{R}^3$ es una base de vectores propios generalizados de A (e.g. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canónica de $\mathbb{R}^3$).

(e) La descomposición de Dunford existe pues P_A escinde sobre $\mathbb{R}$. De acuerdo al algoritmo visto en clases, fijada la base del ítem (d) (e.g. base canónica $\mathscr{B}$), se escribe la matríz de $u_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en dicha base (e.g. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_A)) = A$) y se resta la matriz diagonalizable $\lambda I_3 = 2I_3$ para obtener una matriz nilpotente en dicha base (y luego se regresa a la base original). Para $\mathscr{B}$ base canónica no es necesario hacer cambio de base y obtenemos directamente

$$S = 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y luego } N = A - S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[1] Alternativamente, se puede desarrollar arbitrariamente y se obtiene $P_A(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ y, usando que $\lambda = 2$ es una raíz, se obtiene por división euclideana que $P_A(X) = (X-2)(X^2-4X+4) = (X-2)^3$.

[2] Alternativamente, por el ítem (b) tenemos que $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 1 < \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(2) = 3$, y luego A no es diagonalizable.

[3] Por otra parte, más adelante veremos que eligiendo la cadena de Jordan $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ con $Bv_2 = v_1$, y $v_3 = (0,0,1)$ con $Bv_3 = v_2$, podemos obtener una base donde u_A se escribe en forma canónica de Jordan.