Quiz 2 MAT210

Nombre y apellido : ____

ROL : ____

INSTRUCCIONES GENERALES:

- La evaluación comenzará a las 14:00 horas del día Viernes 12 de Junio de 2020 y debe ser entregada a más tardar a las 19:00 horas del día Viernes 12 de Junio de 2020.
- Lea cuidadosamente cada una de las preguntas y responda justificando de forma clara, concisa y ordenada.
- Se pueden utilizar los apuntes del curso durante la evaluación. Es importante destacar que sólo se supondrán conocidas las nociones allí vistas, y todo argumento utilizando resultados adicionales (no justificados) no será considerado.
- Pruebas donde se detecte copia, plagio de respuestas en Internet, utilización de software para efectuar cálculos, y/o cualquier situación de fraude académico serán calificadas con nota cero. En particular, todas las respuestas deben desarrollarse **usando la notación del curso**. Cabe destacar que AULA cuenta con un sistema de detección de plagio.
- La evaluación debe ser enviada a través de la plataforma AULA en un **único** archivo PDF, el cual debe contener la resolución de la evaluación, la cual debe estar escrita a mano. Adicionalmente, el archivo debe tener por nombre `Q2_MAT210_Apellido_Nombre.pdf`.
- Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.

Problema 1 (50 puntos)

El objetivo de este problema es analizar un endomorfismo en particular, y mostrar que dos matrices con el mismo polinomio característico y mismo polinomio minimal **no** son necesariamente semejantes.

Sea $V \cong \mathbb{R}^{10}$ y sea $u : V \to V$ un endomorfismo nilpotente tal que $u^3 = 0$, $\mathrm{rg}(u^2) = 2$ y $\mathrm{rg}(u) = 5$.

(a) **[20 pts]** Determinar $J \in M_{10}(\mathbb{R})$ la forma canónica de Jordan de u.

(b) **[10 pts]** Calcular $\exp(J)$.

(c) **[20 pts]** Dar un ejemplo de una matriz $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ tal que $P_A(X) = P_J(X)$ y $m_A(X) = m_J(X)$ pero tal que A y J **no** sean semejantes.

Observación: No es necesario escribir matrices 10×10*, basta escribir matrices por bloques, y describir explícitamente cada bloque según corresponda.*

Solución:

(a) El teorema del rango implica que $d_1 = \dim_{\mathbb{R}} \ker(u) = 10-5 = 5$ y $d_2 = \dim_{\mathbb{R}} \ker(u^2) = 10-2 = 8$, mientras que la condición $u^3 = 0$ implica que $d_3 = \dim_{\mathbb{R}} \ker(u^3) = 10$. Luego, la forma canónica de Jordan J de u posee $d_1 = 5$ bloques de Jordan nilpotentes de tamaño ≥ 1, $d_2 - d_1 = 3$ bloques de Jordan nilpotentes de tamaño ≥ 2 y $d_3 - d_2 = 2$ bloques de Jordan nilpotentes de tamaño ≥ 3. En otras palabras, posee 2 bloques de tamaño 1, 1 bloque de tamaño 2, y 2 bloques de tamaño 3. Luego, la forma canónica de Jordan de u está dada por

$$J = J_{(3,3,2,1,1)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} J_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 \end{array}\right),$$

donde $J_1 = (0) \in M_1(\mathbb{R})$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ y $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(b) La exponencial $\exp(J)$ se calcula por bloques:

$$\exp(J) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} e^{J_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{J_3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{J_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{J_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e^{J_1} \end{array}\right),$$

donde $e^{J_1} = (1)$, $e^{J_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $e^{J_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) El polinomio característico de toda matriz nilpotente en $M_{10}(\mathbb{R})$ es $P(X) = X^{10}$, mientras que el polinomio minimal está determinado por el orden de nilpotencia. En este caso, $m_J(X) = X^3$. Luego, basta considerar cualquier matriz $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ nilpotente con orden de nilpotencia 3 que no sea semejante a J o, equivalentemente, cuya forma canónica de Jordan sea diferente de J. Un ejemplo es la matriz de Jordan $A := J_{(3,1,1,1,1,1,1,1)}$ (i.e., la matriz con 1 bloque de Jordan nilpotente J_3 de tamaño 3, y con 7 bloques de Jordan nilpotentes J_1 de tamaño 1), que verifica $P_A(X) = X^{10}$ y $m_A(X) = X^3$, pero que **no** es semejante a J.

Problema 2 (50 puntos)

El objetivo de este problema es determinar la solución general de un sistema diferencial lineal particular.

Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $P_A(X) = (X-1)^4$ y cuyo polinomio minimal es $m_A(X) = (X-1)^2$ (estos hechos, puede usarlos directamente sin tener que demostrarlos).

(a) **[20 pts]** Determinar la descomposición de Dunford de la matriz A y usarla para calcular $\exp(A)$.

(b) **[20 pts]** Determinar la forma canónica de Jordan $J \in M_4(\mathbb{R})$ de A.
Importante: no se pide calcular una base de vectores propios generalizados.

(c) **[10 pts]** Obtener la solución general real del sistema diferencial lineal $\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t)$, donde $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$.

Solución:

(a) Dado que $\lambda = 1$ es el único valor propio de A, tenemos que $A = \underbrace{\lambda \mathrm{I}_4}_{=S} + \underbrace{(A - \lambda \mathrm{I}_4)}_{=N}$ es la descomposición de Dunford de A, i.e.,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $m_A(X) = (X-1)^2$ tenemos que $(A - \mathrm{I}_4)^2 = N^2 = 0$. Luego,

$$e^A = e^S e^N = e^1 \cdot \mathrm{I}_4 \cdot (\mathrm{I}_4 + N) = e \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e & e & -e & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ e & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

(b) Claramente $\mathrm{rg}(N) = 1$ y luego $d_1 = \dim_{\mathbb{R}} \ker(A - \mathrm{I}_4) = 3$. Además, $(A - \mathrm{I}_4)^2 = 0$ implica que $d_2 = \dim_{\mathbb{R}} \ker(A - \mathrm{I}_4)^2 = 4$. Luego, la forma canónica de Jordan de A posee $d_1 = 3$ bloques de tamaño ≥ 1, y posee $d_2 - d_1 = 1$ bloque de tamaño ≥ 2. En otras palabras, posee 2 bloques de tamaño 1 y 1 bloque de tamaño 2. Luego, la forma canónica de Jordan de A está dada por

$$J = J_{(2,1,1)}(1) = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(c) A partir del punto (a) se deduce que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$e^{tA} = e^{tS} e^{tN} = e^t (\mathrm{I}_4 + tN) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{X}_0 = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$ una condición inicial arbitraria. Entonces la solución del sistema está dada por $\mathbf{X}(t) = e^{tA}\mathbf{X}_0$, es decir:

$$\begin{cases} x(t) = e^t(c_1(t+1) + c_2 t - c_3 t) \\ y(t) = c_2 e^t \\ z(t) = e^t(c_1 t + c_2 t + c_3(1-t)) \\ w(t) = c_4 e^t \end{cases}$$