Pauta Quiz 1 – Álgebra Lineal Avanzada (MAT210, 2025-1)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Madeline Castro

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (60 puntos)

Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y sea $\sigma \in S_n$ una permutación.

(a) Pruebe que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

(b) Suponga ahora que $n = 2m$ es par y que

$$\sigma = (n, n-1, \ldots, 3, 2, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escriba σ como producto de transposiciones y calcule $\varepsilon(\sigma)$.

(c) Sea $u : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ endomorfismo tal que $u(e_1) = e_6$, $u(e_2) = e_5$, $u(e_3) = e_4$, $u(e_4) = e_3$, $u(e_5) = e_2$ y $u(e_6) = e_1$, donde $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_6)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^6$. Calcule $\det(u)$.

Solución: Para (a) basta notar que si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$ producto de transposiciones, entonces $\sigma^{-1} = \tau_r \cdots \tau_2 \tau_1$ y luego σ y σ^{-1} tienen la misma paridad[1]. Para (b), utilizamos el algoritmo visto en clases para escribir $(m, m+1) \cdot (m-1, m+2) \cdots (3, 2m-2) \cdot (2, 2m-1) \cdot (1, 2m) \cdot \sigma = \mathrm{Id}$ y luego $\sigma = (1, 2m) \cdot (2, 2m-1) \cdots (m-1, m+2) \cdot (m, m+1)$. Así, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n/2}$. Para (c), observamos que $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_6)) = \det_{\mathscr{B}}(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(6)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_6) = \varepsilon(\sigma)$, donde $\sigma = (6, 5, 4, 3, 2, 1) \in S_6$. Por el ítem (b) con $m = 3$, tenemos que $\det(u) = (-1)^3 = -1$.

Problema 2 (40 puntos)

Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita y sea $u : V \to V$ un endomorfismo tal que $u^2 = u$.

(a) Pruebe que $\lambda \in \{0, 1\}$ son los únicos posibles valores propios de λ. De ejemplos para $V = \mathbb{R}^2$ en donde u tenga solamente $\lambda = 1$ como valor propio, solamente $\lambda = 0$ como valor propio, y donde tenga dos valores propios distintos.

(b) Demuestre que $V = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Indicación: Notar que para todo $v \in V$ se tiene $v = u(v) + (v - u(v))$.

Solución: Para (a), consideramos $v \in V \setminus \{0\}$ y notamos que si $u(v) = \lambda v$ entonces $\lambda v = u(v) = u^2(v) = \lambda^2 v$. Como $v \neq 0$, entonces $\lambda = \lambda^2$ y luego $\lambda \in \{0, 1\}$. Los ejemplos pedidos se obtienen al considerar endomorfismos $u_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociados a las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde claramente } A^2 = A.$$

Para (b), notar que si $v \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ entonces $v = u(w)$ para cierto $w \in V$ y luego $u(v) = u^2(w) = u(w) = v$, como $u(v) = 0$ pues $v \in \ker(u)$, concluímos que $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. Por último, por la Indicación, $v = u(v) + (v - u(v))$ donde $u(v) \in \mathrm{Im}(v)$ y donde $(v - u(v)) \in \ker(u)$ pues $u(v - u(v)) = u(v) - u^2(v) = 0$, y con ello $V = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

---

[1] Alternativamente, dado que $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$, basta notar que $1 = \varepsilon(\mathrm{Id}) = \varepsilon(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1})$, y luego $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.