Guia 5 de Ejercicios (MAT210)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ y sea $Q : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática no-degenerada de signatura $(1, n-1)$.
   (a) Probar que existe un vector no-nulo $x \in V$ tal que $Q(x) > 0$.
   (b) Sea $x \in V$ como en (a), y consideremos $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x)$ la recta generada por x. Probar que la restricción de Q a $H := L^{\perp}$ es definida negativa.
   (c) Sea $B : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica asociada a Q, y sea $y \in V$ tal que $B(x, y) = 0$. Probar que $Q(y) \leq 0$, y que $Q(y) = 0$ si y sólo si $y = 0$.

2. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática dada por
$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx).$$
   (a) Descomponer Q, usando el método de reducción de Gauss, como combinación lineal de cuadrados de formas lineales independientes. Determinar la signatura y el rango de Q.
   (b) Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto a Q.

3. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática dada por $Q(x, y, z) = x^2 - 2yz - xz$.
   (a) Determinar el rango y la signatura de Q. Encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto a Q.
   (b) Para cada real $t \in \mathbb{R}$, sea $\Pi_t \subseteq \mathbb{R}^3$ el plano de ecuación $3x + 2y + tz = 0$. Determinar los valores de $t \in \mathbb{R}$ para los cuales Π_t contiene un vector isótropo no-nulo, y aquellos $t \in \mathbb{R}$ para los cuales la restricción de Q a Π_t es degenerada.

4. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real anti-simétrica (i.e., ${}^{\mathrm{t}}A = -A$). Demostrar que e^A es una matriz ortogonal.

5. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p + q = n$. Probar que los grupos ortogonales $\mathbf{O}(p, q) \cong \mathbf{O}(q, p)$ son isomorfos. Deducir que si Q y Q' son dos formas cuadráticas reales, entonces el hecho que $\mathbf{O}(Q) \cong \mathbf{O}(Q')$ no implica necesariamente que $Q \sim Q'$ son equivalentes[1].

6. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones reales continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Demostrar la desigualdad
$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_a^b g(t)^2\ \mathrm{d}t}$$

7. Sea $V = \mathbb{R}_d[X]$ el espacio vectorial real de polinomios con coeficientes reales en la variable X de grado $\leq d$. El objetivo de este ejercicio es estudiar los llamados **polinomios de Legendre**.
   (a) Probar que la relación
$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$
   define un producto escalar sobre V.
   (b) Sea $m \in \mathbb{N}$ y definamos
$$L_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\{(x^2 - 1)^m\}.$$
   Probar que L_m es un polinomio de grado m y que $(L_0, \ldots, L_d)$ es una base de V. ¿Cuál es el coeficiente principal de L_m? Calcular $L_m(1)$.
   (c) Calcular $\langle L_j, X^k \rangle$ para $k < j$. Deducir que $(L_0, \ldots, L_d)$ es una base ortogonal de V.
   (d) Calcular[2] la norma $\|L_m\|$.

8. Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial real. El objetivo de este ejercicio es determinar condiciones necesarias y suficientes para que una norma en V sea **euclideana** (i.e., que esté inducida por un producto escalar).

[1] Sabemos gracias a §33 que el recíproco es cierto, i.e., si $Q \sim Q'$ entonces $\mathbf{O}(Q) \cong \mathbf{O}(Q')$.

[2] Recordar la identidad $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}$.

(a) Supongamos que V es un espacio euclideano. Probar que para todos $x, y \in V$ se verifica la **ley del paralelógramo**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

y deducir que la fórmula de polarización (ver §29) es equivalente a la fórmula

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

(b) Supongamos que V es un espacio vectorial real arbitrario (no necesariamente euclideano) y sea $Q : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ una función que verifica para todo $x, y \in V$ la relación

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x) + Q(y)). \quad (\star)$$

Probar que en este caso se tiene

$$Q(x+y+z) + Q(x) + Q(y) + Q(z) = Q(x+y) + Q(y+z) + Q(z+x)$$

para todos $x, y, z \in V$.
Indicación: Usar $(\star)$ para calcular $Q(x+y+z)$, $Q(x+y-z)$ y $Q(x-y-z)$.

(c) Con la misma notación e hipótesis que en (b), probar que la función $B : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $B(x, y) := Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ verifica $B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z)$.

(d) Sea $N : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ una **norma** en V (ver §24). Demostrar que N es una norma euclideana (i.e., $N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ para algún producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en V) si y sólo si

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2(N(x) + N(y))^2$$

para todos $x, y \in V$.

(e) Deducir que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$ (definidas en §24) **no** son normas euclideanas.

9. Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano, y sean $u : V \to V$ y $v : V \to V$ dos endomorfismos. Probar que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ y $(u^*)^* = u$.

10. Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclideano. Probar que el conjunto $S \subseteq \mathrm{End}(V)$ dado por

$$S = \{u : V \to V \text{ endomorfismo simétrico}\} \subseteq \mathrm{End}(V) \cong M_n(\mathbb{R})$$

es un sub-espacio vectorial de $\mathrm{End}(V)$ y que $\dim_{\mathbb{R}}(S) = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ un plano euclideano orientado y sean $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Probar que las rotaciones r_θ y $r_{\theta'}$ cumplen $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta = r_{\theta+\theta'}$, $r_0 = \mathrm{Id}_V$ y $r_\pi = -\mathrm{Id}_V$.

12. Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz asociada a Q respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ el valor propio más grande de A. Demostrar que

$$Q(x_1, \ldots, x_n) \leq \lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

13. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica (i.e., $A = {}^{\mathrm{t}}A$). Probar que e^A es definida positiva.

14. Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano y sea $U \subseteq V$ un sub-espacio vectorial. Si denotamos por $s_U : V \to V$ la simetría ortogonal respecto a U y por $p_U : V \to V$ la proyección ortogonal sobre U, probar que $\det(s_U) = (-1)^{\dim_{\mathbb{R}}(U^\perp)}$ y $\mathrm{tr}(p_U) = \dim_{\mathbb{R}}(U)$.

15. Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano y sea $u : V \to V$ una isometría (i.e., $u \in \mathbf{O}(n)$). Probar que u es diagonalizable (sobre $\mathbb{R}$) si y sólo si u es una simetría ortogonal (i.e., existe un sub-espacio vectorial $U \subseteq V$ tal que $u = s_U$).

16. Dar un ejemplo de una matriz simétrica **compleja** que **no** sea diagonalizable[3].

17. Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ un plano euclideano orientado.

(a) Probar que para toda reflexión $s : V \to V$ se cumple

$$\measuredangle(s(x), s(y)) = -\measuredangle(x, y) \mod 2\pi\mathbb{Z}.$$

[3] Por otro lado, sabemos que toda matriz simétrica **real** es diagonalizable (ver §36).

(b) Sean $x, y, z \in V \setminus \{0\}$ vectores no-nulos. Probar que $\measuredangle(x, y) + \measuredangle(y, z) = \measuredangle(x, z) \mod 2\pi\mathbb{Z}$, que $\measuredangle(y, x) = \measuredangle(x, -y) \mod 2\pi\mathbb{Z}$, y que $\measuredangle(x, -y) = \measuredangle(x, y) + \pi \mod 2\pi\mathbb{Z}$.

18. Determinar (usando las ideas vistas en §37) todos los elementos del grupo $\mathbf{O}(1, 1) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ definido en §33.

19. Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano orientado.

   (a) Sea $r \in \mathbf{SO}(3)$ una isometría directa y sea $r_L \in \mathbf{SO}(3)$ una rotación respecto a un eje $L \subseteq V$. Probar que $r \circ r_L \circ r^{-1} \in \mathbf{SO}(3)$ y que $\mathrm{tr}(r \circ r_L \circ r^{-1}) = \mathrm{tr}(r_L)$, y deducir que $r \circ r_L \circ r^{-1}$ es una rotación de eje $r(L)$ y de mismo ángulo que r_L.

   (b) Deducir que el grupo $\mathbf{SO}(3)$ de isometrías directas de V no es conmutativo.

20. Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano, y sean $L_1, L_2 \subseteq V$ dos rectas distintas. Sea $r_1 : V \to V$ una rotación de eje L_1 y $r_2 : V \to V$ una rotación de eje L_2. El objetivo de este ejercicio es estudiar la rotación $r_1 \circ r_2$.

   (a) Sea $\Pi \subseteq V$ el plano que contiene L_1 y L_2. Justificar que podemos escribir $r_1 = s_\Pi \circ s_{\Pi_1}$ y $r_2 = s_\Pi \circ s_{\Pi_2}$, donde Π_1 (resp. Π_2) es un plano que contiene L_1 (resp. L_2).

   (b) Calcular $r_1 \circ r_2$ en términos de s_Π, s_{Π_1} y s_{Π_2}, y deducir que $r_1 \circ r_2$ es una rotación de eje $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

21. Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano orientado y $\Pi \subseteq V$ un plano. Si $s_\Pi : V \to V$ es la reflexión respecto a Π, probar que $-s_\Pi$ es una rotación de ángulo π de eje $\Pi^\perp$.

22. Demostrar que la matriz real

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   es una matriz de rotación (i.e., $A \in \mathbf{SO}(3)$ y $\mathrm{tr}(A) < 3$). Determinar su eje y ángulo de rotación.

23. Considerar la cónica $C \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por

$$x^2 + 12xy - 4y^2 = 30.$$

   Determinar una base ortonormal en la cual C admite una ecuación reducida. Describir explícitamente dicha ecuación reducida y deducir la naturaleza geométrica de C. Calcular sus ejes y sus vértices.

24. Considerar la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por

$$xy + xz + yz + 2y + 1 = 0.$$

   Determinar una base ortonormal en la cual S admite una ecuación reducida. Describir explícitamente dicha ecuación reducida y deducir la naturaleza geométrica de S.

25. Considerar la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0.$$

   Determinar una base ortonormal en la cual S admite una ecuación reducida. Describir explícitamente dicha ecuación reducida y deducir la naturaleza geométrica de S.

26. Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ espacio euclideano y sea $S \subseteq V$ un elipsoide o un hiperboloide de dos hojas. Probar que para todo punto $p \in S$ la intersección $T_pS \cap S$ es exactamente el punto p.