Guia 4 de Ejercicios (MAT210)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Sea k un cuerpo, y sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n$.

1. Sea A un grupo abeliano y $B \subseteq A$ un sub-grupo. Determinar cuándo la proyección canónica al cociente $\pi : A \twoheadrightarrow A/B$ es **inyectiva**.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canónica. Sea $\Pi = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)$ el plano xy. Describir, tanto gráficamente como en términos de una base, el espacio cociente V/Π y la proyección canónica $\pi : V \twoheadrightarrow V/\Pi$.

3. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y sea $U \subseteq V$ un sub-espacio vectorial. Sea $T \subseteq W$ un sub-espacio vectorial tal que $u(U) \subseteq T$. Probar que f induce una aplicación lineal
$$\widehat{g} : V/U \to W/T,$$
y describirla en términos de $f : V \to W$, $\pi_U : V \twoheadrightarrow V/U$ y $\pi_T : W \twoheadrightarrow W/T$.
Indicación: Considerar la aplicación $g := \pi_T \circ f$ y verificar la propiedad universal del cociente.

4. El objetivo de este ejercicio es dar una demostración alternativa al hecho de que todo endomorfismo $u : V \to V$ tal que $P_u \in k[X]$ escinde sobre k es trigonalizable (ver §19). Sea $u : V \to V$ tal que $P_u(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \lambda_j)$ escinde sobre k con raíces (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$. Probaremos que existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ es triangular superior con coeficientes diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:
   (a) Verificar que la conclusión es cierta si $n = \dim_k(V) = 1$.
   (b) Supongamos que $n \geq 2$. Probar que, dado que P_u escinde sobre k, existe al menos un vector propio $v_1 \in V$ y deducir que $\dim_k(V/L) = n - 1$, donde $L = \mathrm{Vect}_k(v_1)$.
   (c) Probar que u induce un endomorfismo $u_{V/L} : V/L \to V/L$ y que $P_{u_{V/L}}(X) = \prod_{j=2}^{n}(X - \lambda_j)$.
   (d) Deducir, usando inducción en $n = \dim_k(V)$, que V/L admite una base $\mathscr{D} = (v_2, \ldots, v_n)$ tal que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(u_{V/L})$ es triangular superior con coeficientes diagonales $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sean $e_2, \ldots, e_n \in V$ tales que $u_{V/L}(e_i) = v_i$ para $i \in \{2, \ldots, n\}$, probar (c.f. demostración del teorema del rango) que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ es una base de V y que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ tiene la forma deseada.

5. Sea $u : V \to W$ aplicación lineal. Probar que la aplicación transpuesta ${}^{\mathrm{t}}u : W^* \to V^*$ es lineal.

6. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n. Sea $\mathscr{B}$ una base de V, y sea $\mathscr{B}^*$ la correspondiente base dual de V^*.
   (a) Sea $\mathscr{C}$ otra base de V, y sea $\mathscr{C}^*$ la correspondiente base dual de V^*. Si denotamos por $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \in \mathrm{GL}_n(k)$ la matriz de cambio de base (ver §5), probar que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(\mathscr{C}^*) = {}^{\mathrm{t}}P^{-1}$ es la matriz de cambio de base de las bases duales.
   (b) Probar, a partir de lo anterior y de la propiedad de reflexividad, que para toda base $\mathscr{D}$ de V^* <u>existe una única</u> base $\mathscr{B}$ de V tal que $\mathscr{B}^* = \mathscr{D}$ es la correspondiente base dual. Típicamente, decimos que $\mathscr{B}$ es la base **pre-dual** de $\mathscr{D}$.
   (c) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canónica. Consideremos la familia $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$, donde $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_3$. Probar que $\mathscr{C}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y usar el punto (a) para calcular $\mathscr{C}^*$ en términos de $\mathscr{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$.

7. Supongamos que $\dim_k(V) = n$, y sean $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ formas lineales. Demostrar que $f_1, \ldots, f_n$ generan V^* si y sólo si
$$\ker(f_1) \cap \cdots \cap \ker(f_n) = \{0\}.$$

8. Sea $V = \mathbb{R}[X]_d$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios reales en la variable X de grado $\leq d$. Sean $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ tales que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, y que fijamos durante todo el ejercicio. Consideremos las formas lineales $f_0, \ldots, f_d \in V^*$ dadas por $f_i(P) := P(a_i)$ para $i \in \{0, \ldots, d\}$.

   (a) Demostrar que $\mathscr{B}^* = (f_0, \ldots, f_d)$ es una base de V^*.
   Indicación: Usar el Ejercicio 7.

   (b) Deducir, a partir de lo anterior, que la **matriz de Vandermonde** (c.f. Quiz 1, Problema 2) dada por $A(a_0, \ldots, a_d) := (a_i^j)_{0 \leq i,j \leq d}$ es invertible.

   (c) Determinar la base pre-dual (ver Ejercicio 6.(b)) de $\mathscr{B}^*$, i.e., la única base $\mathscr{B}$ de V tal que $\mathscr{B}^*$ es la correspondiente base dual.

   (d) **(Interpolación de Lagrange)**: Dados números reales $b_0, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$, determinar un polinomio real $P(X)$ de grado $\leq d$ tal que $P(a_i) = b_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, d\}$.

9. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $U, W \subseteq V$ sub-conjuntos no-vacíos de V.

   (a) Probar que $U \subseteq W$ implica que $W^\circ \subseteq U^\circ$, y que $(U \cup W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$.

   (b) Demostrar que, si identificamos V y V^{**} mediante la evaluación canónica $\psi : V \to V^{**}$, entonces $U \subseteq (U^\circ)^\circ$ y[1] $U^\circ + W^\circ \subseteq (U \cap W)^\circ$. Probar que si adicionalmente suponemos que los sub-conjuntos $U, W \subseteq V$ son sub-espacios vectoriales, entonces se tienen las igualdades $U = (U^\circ)^\circ$ y $U^\circ + W^\circ = (U \cap W)^\circ$.

10. Sean U, V y W tres k-espacios vectoriales de dimensión finita, y sean $u : V \to W$ y $v : W \to U$ aplicaciones lineales. Probar que ${}^{\mathrm{t}}(v \circ u) = {}^{\mathrm{t}}u \circ {}^{\mathrm{t}}v$ y que ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_{V^*}$.

11. Sea $Q : k^n \to k$ la forma cuadrática dada por

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

   Sea $B : k^n \to k^n \to k$ sea la (única) forma bilineal simétrica asociada a Q (mediante la fórmula de polarización). Probar que la matriz $A_{\mathscr{B}} = (b_{ij})$ de la forma bilineal B, respecto a la base canónica $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de k^n, está dada por

$$b_{ii} = a_{ii}, \quad b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} \text{ si } i < j, \quad b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ji} \text{ si } i > j.$$

   Deducir de lo anterior la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática $Q : k^2 \to k$ dada por $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$.

12. Probar que toda forma cuadrática $Q : V \to k$ de rango 1 es de la forma $Q(x) = \mu f(x)^2$ para ciertos $\mu \in k$ y $f \in V^*$.

13. Sea $B : V \to V \to k$ forma bilineal. Supongamos que para todos $x, y \in V$ la condición $B(x, y) = 0$ implica que $B(y, x) = 0$. Probar que necesariamente B es una forma bilineal simétrica o bilineal alternada (ver §9).
    Indicación: Considerar la expresión $B(x, B(x, y)z - B(x, z)y)$.

14. Sea $V = M_n(k)$ el k-espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes en k. Probar que la aplicación

$$\mathrm{tr} : M_n(k) \times M_n(k) \to k, \ (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$$

    es una forma bilineal, que es simétrica y no-degenerada.

15. Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de matrices 2×2 con coeficientes reales. Consideremos la aplicación $Q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $Q(A) = \det(A) - \frac{1}{4} \mathrm{tr}(A)^2$.

[1] Recordar que si $V_1, V_2 \subseteq V$ son sub-espacios vectoriales, entonces $V_1 + V_2 = \mathrm{Vect}_k(V_1, V_2)$ es el espacio vectorial generado por V_1 y V_2 (ver §14).

(a) Demostrar que Q es una forma cuadrática no-degenerada. Expresar $Q(A)$ en términos de $\operatorname{tr}(A)$ y de $\operatorname{tr}(A^2)$.

(b) Determinar la forma bilineal simétrica B asociada a Q, y calcular $\ker(B)$.

16. Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal simétrica, y sean $U, W \subseteq V$ sub-conjuntos no-vacíos de V.

    (a) Probar que $U \subseteq W$ implica que $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$, y que $(U \cup W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

    (b) Demostrar que $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$ y $U^{\perp} + W^{\perp} \subseteq (U \cap W)^{\perp}$. Probar que si adicionalmente suponemos que los sub-conjuntos $U, W \subseteq V$ son sub-espacios vectoriales y que $B : V \times V \to k$ es una forma bilineal no-degenerada, entonces se tienen las igualdades $U = (U^{\perp})^{\perp}$ y $U^{\perp} + W^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}$.

    (c) Dar un ejemplo de una forma $B : V \times V \to k$ degenerada (i.e., $\operatorname{rg}(B) < \dim_k(V)$) y sub-espacios vectoriales $U, W \subseteq V$ tales que las inclusiones $U \subsetneq (U^{\perp})^{\perp}$ y $U^{\perp} + W^{\perp} \subsetneq (U \cap W)^{\perp}$ sean estrictas.

17. Sea $Q : V \to k$ una forma cuadrática dada por una combinación lineal con coeficientes no-nulos de cuadrados de formas lineales $f_1, \ldots, f_r \in V^*$ linealmente independientes, i.e.,

$$Q = \lambda_1 f_1^2 + \ldots + \lambda_r f_r^2,$$

donde $\lambda_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Sea $B : V \times V \to k$ la (única) forma bilineal simétrica asociada a Q. Demostrar que $\operatorname{rg}(Q) := \operatorname{rg}(B) = r$ y que $\ker(Q) := \ker(B)$ está dado por

$$\ker(Q) = \ker(f_1) \cap \ldots \cap \ker(f_r).$$

18. Sea $Q : V \to k$ una forma cuadrática y sean $e_1, \ldots, e_r \in V$ vectores ortogonales respecto a Q (i.e., ortogonales respecto a la forma bilineal simétrica $B : V \times V \to k$ asociada a Q). Probar el **teorema de Pitágoras**:

$$Q(e_1 + \ldots + e_r) = Q(e_1) + \ldots + Q(e_r).$$

§30. Ortogonalidad respecto a una forma cuadrática (resumen):

A continuación resumimos los conceptos y resultados necesarios para resolver los ejercicios 16–18, que serán discutidos durante la primera parte de la clase del día Lunes 15 de Junio, y que serán evaluados en el Certamen 2.

Definición: Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal simétrica. Decimos que

1. Los vectores $x, y \in V$ son **ortogonales** (respecto a B o, equivalentemente, respecto a la forma cuadrática Q asociada a B) si $B(x, y) = 0$.
2. Sea $U \subseteq V$ un sub-conjunto no-vacío. Definimos el **ortogonal de** U como
$$U^{\perp} = \{y \in V \mid B(x, y) = 0 \text{ para todo } x \in U\}.$$
3. Un vector $x \in V$ es **isótropo** si $Q(x) = B(x, x) = 0$ (i.e., si x es ortogonal a sí mismo).

Lema: Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal simétrica, y sea $\widehat{B} : V \to V^*$, $y \mapsto B^y = B(\cdot, y)$ definida en §29. Sea $U \subseteq V$ un sub-conjunto no-vacío. Entonces,
$$U^{\perp} = \widehat{B}^{-1}(U^{\circ}).$$
En particular, $U^{\perp} \subseteq V$ es un sub-espacio vectorial de V. Más aún, $U^{\perp} \cong U^{\circ}$ si B es no-degenerada.

Teorema: Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal simétrica y $U \subseteq V$ un sub-espacio vectorial. Entonces,
$$\dim_k(U) + \dim_k(U^{\perp}) \geq \dim_k(V) \quad \text{y} \quad U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}.$$
Más aún, si B es no degenerada entonces se tienen las igualdades:
$$\dim_k(U) + \dim_k(U^{\perp}) = \dim_k(V) \quad \text{y} \quad U = (U^{\perp})^{\perp}.$$

⚠ **¡Atención!** Incluso si $B : V \times V \to k$ es no-degenerada, **no** necesariamente tenemos que $V = U \oplus U^{\perp}$. Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^2$ y $B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ entonces la recta $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$ verifica $U = U^{\perp}$ (i.e., es una recta de vectores isótropos). Luego, $\dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(U^{\perp}) = 2$ (tal como lo indica el teorema anterior), pero $U \cap U^{\perp} \neq \{0\}$.

Definición: Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal simétrica. Decimos que una base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V es **ortogonal** respecto a la forma bilineal B (o, equivalentemente, respecto a la forma cuadrática Q asociada a B) si $B(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$.

Observación: Matricialmente, $\mathscr{B}$ es ortogonal respecto a B si la matriz $A_{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B)$ es **diagonal**:
$$A_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & & & \\ & B(e_2, e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

⚠ Es importante notar que B es no-degenerada si y sólo si $Q(e_i) = B(e_i, e_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema: Toda forma bilineal simétrica posee una base ortogonal.

Corolario: Toda forma cuadrática $Q : V \to k$ en un k-espacio vectorial V de dimensión n es combinación lineal de n cuadrados de formas lineales, i.e.,
$$Q = \lambda_1 f_1^2 + \ldots + \lambda_n f_n^2$$
para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ y ciertas formas lineales $f_1, \ldots, f_n \in V^*$.

⚠ **¡Atención!** La demostración del corolario anterior nos permite ser más precisos: si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ es una base de V que ortogonal respecto a la forma bilineal simétrica B asociada a Q, entonces se tiene que $Q = \sum_{j=1}^{n} Q(e_i)(e_j^*)^2$.