Certamen 3 MAT210

Nombre y apellido : ____

ROL : ____

Instrucciones Generales:

- La evaluación comenzará a las 10:00 AM del día Sábado 8 de Agosto de 2020 y debe ser entregada a más tardar a las 22:30 PM del día Sábado 8 de Agosto de 2020.
- Lea con cuidado cada una de las preguntas y responda justificando de forma clara, concisa y ordenada.
- Se pueden utilizar los apuntes del curso durante la evaluación. Es importante destacar que sólo se supondrán conocidas las nociones vistas en el curso y en la ayudantía, y todo argumento utilizando resultados adicionales (no justificados) no será considerado.
- Pruebas donde se detecte copia, plagio de respuestas en Internet, utilización de software para efectuar cálculos, y/o cualquier situación de fraude académico serán calificadas con nota cero. En particular, todas las respuestas deben desarrollarse **usando la notación del curso**. Cabe destacar que AULA cuenta con un sistema de detección de plagio.
- La evaluación debe ser enviada a través de la plataforma AULA en un **único** archivo PDF, el cual debe contener la resolución de la evaluación, la cual debe estar escrita a mano. Adicionalmente, el archivo debe tener por nombre `C3_MAT210_Apellido_Nombre.pdf`.
- Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.
- **Importante:** El objetivo de este certamen es desarrollar correctamente tres problemas, el objetivo **no es** terminar todo el certamen. Específicamente:
  (a) Cada estudiante debe escoger 3 problemas a desarrollar, entre un total de 5 problemas.
  (b) En la primera página, junto con su nombre, se deben mencionar los 3 problemas escogidos.
  (c) Sólo se corregirán 3 problemas. En caso de que una persona desarrolle más de 3 problemas, sólo se considerarán los 3 primeros de acuerdo al orden en que aparezcan en la hoja de respuestas.
  (d) Adicionalmente a los 3 problemas escogidos, se podrán desarrollar problemas "Bonus" de manera totalmente opcional para tener puntos extra. La corrección de los problemas "Bonus" será dicotómica (0 o 5 puntos, no habrá puntaje intermedio).

Notación: Durante todo el Certamen, denotaremos por k un cuerpo arbitrario (a menos que se especifique lo contrario) y por V un k-espacio vectorial de dimensión finita $\dim_k(V) = n \geq 1$.

Tabla de puntajes: Puntaje base: 1 punto.

P1	(a)	(b)	(c)	(d)	P2	(a)	(b)	(c)	(d)
	3	10	10	10		10	10	3	10
P3	(a)	(b)	(c)	(d)	P4	(a)	(b)	(c)	(d)
	10	3	10	10		10	10	10	3
P5	(a)	(b)	(c)	(d)					
	10	10	10	3					
B	B1	B2	B3	B4	B5	B6			
	5	5	5	5	5	5			

Problema 1 (33 puntos)

El objetivo de este problema es describir una forma cuadrática específica y describir el lugar geométrico que define.

Durante todo este problema, nos ubicaremos en el $k-$espacio vectorial k^3 de coordenadas (x, y, z) respecto a su base canónica $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$, donce $k = \mathbb{R}$ en los puntos (a),(b),(c) y donde $k = \mathbb{C}$ en el punto (d). Sea $Q : k^3 \to k$ la forma cuadrática dada por

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 7z^2 + 4xy + 2xz - 2yz.$$

(a) Determinar la matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ de Q respecto a la base canónica $\mathscr{C}$ y describir la única forma bilineal simétrica $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ asociada a Q.

(b) Utilizando el método de reducción de Gauss, determinar una descomposición de Q como suma de cuadrados de formas lineales independientes. Deducir el rango y la signatura de Q.

(c) Deducir la naturaleza geométrica[1] de la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y, z) = 1\}.$$

Sin hacer ningún cálculo adicional, justifique si es posible o no determinar una base de $\mathbb{R}^3$ que sea **ortonormal** respecto a Q.

(d) Para $k = \mathbb{C}$, determinar una base de $\mathbb{C}^3$ que sea ortonormal respecto a Q.
Indicación: Para $Q(X_1, \ldots, X_n) = f_1^2 + \ldots + f_p^2 - f_{p+1}^2 - \ldots - f_{p+q}^2$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, con f_j formas lineales, el cambio de variable en $\mathbb{C}^n$ dado por $g_j := i f_j$ para $j = p+1, \ldots, p+q$ simplifica los cálculos.

Solución:

(a) La matriz A de Q en la base canónica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

En particular, deducimos[2] que la forma bilineal simétrica asociada a Q está dada por

$$B((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + 3y_1y_2 - 7z_1z_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1z_2 + x_2z_1 - y_1z_2 - y_2z_1.$$

(b) El método de reducción de Gauss da

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= x^2 + 3y^2 - 7z^2 + 4xy + 2xz - 2yz = x^2 + 2x(2y + z) + 3y^2 - 7z^2 - 2yz \\ &= (x + (2y + z))^2 - (2y + z)^2 + 3y^2 - 7z^2 - 2yz \\ &= (x + 2y + z)^2 - (4y^2 + 4yz + z^2) + 3y^2 - 7z^2 - 2yz \\ &= (x + 2y + z)^2 - y^2 - 8z^2 - 6yz = (x + 2y + z)^2 - (y^2 + 2y \cdot 3z) - 8z^2 \\ &= (x + 2y + z)^2 - ((y + 3z)^2 - 9z^2) - 8z^2 = (x + 2y + z)^2 - (y + 3z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Obtenemos así una descomposición de Q como suma de cuadrados de formas lineales independientes

$$Q = f_1^2 - f_2^2 + f_3^2,$$

donde $f_1(x, y, z) = x + 2y + z$, $f_2(x, y, z) = y + 3z$ y $f_3(x, y, z) = z$. En particular, Q es de signatura $(2, 1)$ y de rango 3 (no-denegerada).

[1] Es decir, determinar si es una cuádrica suave o singular, centrada o no, y (si corresponde) determinar si es un elipsoide o un hiperboloide de una o dos hojas. **¡Atención!** **No** se pide calcular los ejes ni el centro de $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

[2] Alternativamente, puede usarse la fórmula de polarización para calcular B y a partir de B deducir A.

(c) La superficie cuádrica S es centrada pues Q es una cuádrica no-degenerada. Sea $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ dada por[3] la base (pre-)dual de la base (f_1, f_2, f_3) de $(\mathbb{R}^3)^*$. Entonces, si (X, Y, Z) son coordenadas respecto a $\mathscr{B}$, entonces

$$Q(X,Y,Z) = X^2 - Y^2 + Z^2$$

es la ecuación reducida de Q. En particular, la cuádrica S dada por $Q(X,Y,Z) = 1$ es suave, pues el término constante $c = 1$ es no-nulo. Finalmente, dado que la signatura de Q es $(2,1)$ se trata de un hiperboloide de una hoja.

Finalmente, si la forma cuadrática Q admitiese una base ortonormal, entonces la matriz de Q respecto a dicha base sería la matriz identidad y en particular su signatura sería $(3,0)$, lo cual es imposible por el Teorema de Sylvester.

(d) Consideremos el cambio de variable $g_2(x,y,z) := i f_2(x,y,z) = iy + 3iz$. Luego, $Q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ se escribe como $Q = f_1^2 + g_2^2 + f_3^3$. La matriz de (f_1, g_2, f_3) respecto a la base canónica dual de $\mathbb{C}^3$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 1 & 3i & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, para calcular la base (pre-dual) asociada a $\mathscr{D} = (f_1, g_2, f_3)$ calculamos ${}^{\mathrm{t}}P^{-1}$:

$${}^{\mathrm{t}}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & i & 3i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 5 \\ 0 & -i & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, si denotamos $v_1 = (1,0,0), v_2 = (2i, -i, 0), v_3 = (5, -3, 1) \in \mathbb{C}^3$, entonces $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ es una base de $\mathbb{C}^3$ que es ortogonal respecto a Q.

Problema 2 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar bases ortogonales respecto a una producto escalar específico.

Durante este problema $V = \mathbb{R}[X]_2 \cong \mathbb{R}^3$ es el espacio vectorial real de polinomios reales de grado menos o igual a 2 en la variable X. Para $P, Q \in \mathbb{R}[X]_2$ definimos la aplicación

$$B(P,Q) = \int_{-1}^{1} |t| P(t) Q(t)\, \mathrm{d}t.$$

(a) Probar que B es un producto escalar en $\mathbb{R}[X]_2$ y determinar la matriz $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B) \in M_3(\mathbb{R})$ de B respecto a la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}[X]_2$.
Indicación: Reducir los cálculos a integrar en $[0,1]$, usando la paridad o imparidad de las funciones.

En lo que sigue, escribimos símplemente $B(P,Q) := \langle P, Q \rangle$:

(b) Utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, construir a partir de la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ una base B-ortogonal $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}[X]_2$.

(c) Deducir una base B-ortonormal de $\mathbb{R}[X]_2$.

(d) Sea $M \in M_3(\mathbb{R})$ la matriz cuyos vectores columnas $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ están dados por las coordenadas de los vectores $e_1 = 1, e_2 = X$ y $e_3 = X^2$ de $\mathbb{R}[X]_2$ respecto a la base $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2)$. Deducir la factorización QR de la matriz M.

Solución:

[3] En este punto en particular, no es necesario calcularla: basta con usar la existencia.

(a) Por linealidad de la integral, tenemos que B es lineal respecto a cada argumento (i.e., B es una forma bilineal). Más aún, como $PQ = QP$ en $\mathbb{R}[X]$ tenemos que B es una forma bilineal simétrica. Luego, para probar que B es un producto escalar basta probar que es definida positiva:

$$B(P,P) = \int_{-1}^{1} |t| P(t)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Dado que integramos una función (continua) positiva o nula, el resultado es positivo o nulo y luego $B(P,P) \geq 0$. Por otro lado, si $B(P,P) = 0$ entonces estamos integrando en un intervalo cerrado una función *continua* positiva o nula, por lo que necesariamente para todo $t \in [-1,1]$ se tiene $|t|P(t)^2 = 0$ y luego para todo $t \neq 0$ en $[-1,1]$ se cumple $P(t) = 0$. Así, el polinomio P admite una cantidad infinita de raíces y luego[4] necesariamente $P = 0$. Así, $B : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto escalar, que denotaremos $B(P,Q) = \langle P, Q \rangle$ en lo que sigue. Calculamos

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1 \rangle &= \int_{-1}^{1} |t| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t \,\mathrm{d}t = 1,\\
\langle 1, X \rangle &= \int_{-1}^{1} |t| t \,\mathrm{d}t = 0,\\
\langle 1, X^2 \rangle &= \int_{-1}^{1} |t| t^2 \,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^3 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2},\\
\langle X, X \rangle &= \int_{-1}^{1} |t| t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2},\\
\langle X, X^2 \rangle &= \int_{-1}^{1} |t| t^3 \,\mathrm{d}t = 0,\\
\langle X^2, X^2 \rangle &= \int_{-1}^{1} |t| t^4 \,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^5 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

donde las integrales nulas se obtienen gracias a la imparidad de las funciones. Luego,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es la matriz de la forma bilineal B respecto a la base $\mathscr{B}$.

(b) Utilizamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt usando el producto escalar B. Para esto, definimos $P_0 := 1$ y calculamos

$$\begin{aligned}
P_1 &= X - \frac{\langle X, P_0 \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 = X - \frac{\langle X, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 = X.\\
P_2 &= X^2 - \frac{\langle X^2, P_0 \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 - \frac{\langle X^2, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 = X^2 - \frac{\langle X^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle X^2, X \rangle}{\|X\|^2} X = X^2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Así, $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2 - \frac{1}{2})$ es una base B-ortogonal de V.

(c) Para obtener una base B-ortonormal basta dividir cada elemento por su norma:

$$\begin{aligned}
P_0' &:= \frac{P_0}{\|P_0\|} = \frac{1}{\|1\|} = 1.\\
P_1' &:= \frac{P_1}{\|P_1\|} = \frac{X}{\|X\|} = \sqrt{2} X.\\
P_2' &:= \frac{P_2}{\|P_2\|} = \frac{X^2 - \frac{1}{2}}{\|X^2 - \frac{1}{2}\|} = 2\sqrt{3}\left(X^2 - \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

puesto que $\|X^2 - \frac{1}{2}\|^2 = \langle X^2 - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{1}{2} \rangle = \|X^2\|^2 - \langle X^2, 1 \rangle + \frac{1}{4}\|1\|^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

[4] Alternativamente, se puede escribir $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y probar que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, pero la ventaja del argumento anterior es que es válido para polinomios de cualquier grado, además de evitar hacer cálculos.

(d) Dado que $X^2 = (X^2 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 1$, la matriz M está dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que M es una matriz triangular superior con coeficientes diagonales positivos, tenemos que $M = R$ y $Q = \mathrm{I}_n \in \mathbf{O}(3)$ verifican $M = QR$. Dado que la descomposición QR es única, es necesariamente la descomposición deseada[5].

Problema 3 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar una isometría del espacio euclideano orientado $\mathbb{R}^3$.

Sea $a \in [-1, 1]$ un parámetro real. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a\sqrt{1-a^2} & \sqrt{1-a^2} \\ a\sqrt{1-a^2} & 1-a^2 & -a \\ \sqrt{1-a^2} & -a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Demostrar que A es una matriz ortogonal (i.e., $A \in \mathbf{O}(3)$) de determinante -1.

(b) Sea $B = -A$. Probar que $B \in \mathbf{SO}(3)$ y que es una matriz de rotación para todo $a \in [-1, 1]$.

(c) Para $a = 0$, determinar el eje de rotación $L \subseteq \mathbb{R}^3$ de la matriz B.

(d) Para $a = 0$, determinar la ecuación del plano ortogonal $\Pi = L^\perp$ y el ángulo de rotación $\theta \in]-\pi, \pi]$ de B.

Solución:

(a) Sean $v_1 = (a^2, a\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-a^2}), v_2 = (a\sqrt{1-a^2}, 1-a^2, -a), v_3 = (\sqrt{1-a^2}, -a, 0) \in \mathbb{R}^3$ los vectores columna de A. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_1 \rangle &= a^4 + a^2(1-a^2) + (1-a^2) = a^4 + a^2 - a^4 + 1 - a^2 = 1 \\
\langle v_1, v_2 \rangle &= a^3\sqrt{1-a^2} + (a\sqrt{1-a^2} - a^3\sqrt{1-a^2}) - a\sqrt{1-a^2} = 0 \\
\langle v_1, v_3 \rangle &= a^2\sqrt{1-a^2} - a^2\sqrt{1-a^2} = 0 \\
\langle v_2, v_2 \rangle &= (a^2 - a^4) + (1 - 2a^2 + a^4) + a^2 = 1 \\
\langle v_2, v_3 \rangle &= (a - a^3) + (a^3 - a) = 0 \\
\langle v_3, v_3 \rangle &= 1 - a^2 + a^2 = 1.
\end{aligned}$$

Luego, $A \in \mathbf{O}(3)$ es una matriz ortogonal. Notar que $v_1 \times v_2 = v_3$ (resp. $v_1 \times v_2 = -v_3$) si y sólo si $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ es una base directa (resp. indirecta) de $\mathbb{R}^3$, lo que equivale a su vez a que $\det(A) = 1$ (resp. $\det(A) = -1$). Para verificar el signo de $\pm v_3$ en $v_1 \times v_2$ basta calcular una coordenada. Por ejemplo, la primera coordenada de $v_1 \times v_2$ es

$$\begin{vmatrix} a\sqrt{1-a^2} & 1-a^2 \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{vmatrix} = -a^2\sqrt{1-a^2} - (1-a^2)\sqrt{1-a^2} = -\sqrt{1-a^2}.$$

Luego[6], $\det(A) = -1$.

[5] Alternativamente, al aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a las columnas de A obtenemos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y luego $Q = \mathrm{I}_3$.

[6] Alternativamente, se puede calcular que ${}^{t}AA = \mathrm{I}_3$ y $\det(A) = -1$, pero hacerlo geométricamente es mucho más rápido.

(b) Dado que $\langle v_i, v_i \rangle = \langle -v_i, -v_i \rangle$, las columnas de B siguen siendo ortonormales[7] y luego $B \in \mathbf{O}(3)$. Más aún, $\det(B) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = (-1)(-1) = 1$, por lo que $B \in \mathbf{SO}(3)$. Dado que $\operatorname{tr}(B) = -\operatorname{tr}(A) = -1 < 3$, concluímos que B es una matriz de rotación.

(c) Para $a = 0$ obtenemos que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que el eje de rotación L está dado por el espacio propio $V_1 = \ker(B - \mathrm{I}_3)$ que calculamos resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x - z \\ -2y \\ -x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $e = (1, 0, -1)$ es un vector director de la recta L.

(d) El plano ortogonal $\Pi = L^{\perp}$ está dado por la ecuación $\langle (x, y, z), (1, 0, -1) \rangle = x - z = 0$, i.e., $x = z$. Si orientamos la recta L usando el vector director $e = (1, 0, -1)$, entonces el ángulo de rotación $\theta \in]-\pi, \pi]$ verifica $\operatorname{tr}(B) = -1 = 2\cos(\theta) + 1$, i.e., $\cos(\theta) = -1$. Así, el único valor posible de $\theta \in]-\pi, \pi]$ es $\theta = \pi$.

Problema 4 (33 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar en detalles las propiedades de un endomorfismo particular en un espacio hermitiano de dimensión 3.

Durante todo este problema consideraremos el espacio hermitiano $\mathbb{C}^3$ dotado del producto escalar complejo estándar

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + z_3 \overline{w_3},$$

para todos $z = (z_1, z_2, z_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$. Consideremos la matriz compleja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}),$$

donde $i \in \mathbb{C}$ es la unidad imaginaria.

(a) Sin calcular valores ni vectores propios, justificar que la matriz A es diagonalizable respecto a una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$. ¿Qué se puede decir sobre los valores propios de A?

(b) Sea $P(X) = P_A(X) = \det(X\mathrm{I}_3 - A) \in \mathbb{C}[X]$ el polinomio característico de A. Calcular $Q(X) := P(iX)$ y determinar las raíces de Q. A partir de lo anterior, deducir los valores propios de A, los cuales serán escritos de la forma $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = i\omega^2$ y $\lambda_3 = i\omega^3$ para cierto $\omega \in \mathbb{C}$ a determinar.

(c) Sea $\beta \in \{\omega, \omega^2, \omega^3\}$. Haciendo operaciones columnas sobre $A - i\beta\mathrm{I}_3$ o resolviendo un sistema lineal, determinar un vector propio v_β de A asociado al valor propio $i\beta$.
Indicación: Es más rápido considerar directamente β, en lugar de tratar los tres casos por separado.

(d) Sea $u : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el endomorfismo asociado a la matriz A. Determinar una base ortonormal $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^3$ formada de vectores propios de A y determinar $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Solución:

[7] Alternativamente, ${}^{\mathrm{t}}BB = (-{}^{\mathrm{t}}A)(-A) = {}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_3$.

(a) Sean $v_1 = (0, i, 0), v_2 = (0, 0, i), v_3 = (i, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$ las columnas de A. Entonces $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$ y $\langle v_j, v_k\rangle = 0$ para $j \neq k$. Luego, $A \in \mathbf{U}(3)$ es una matriz unitaria. En particular, el Teorema espectral implica que A es diagonalizable respecto a una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ y que los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ de A son de módulo 1, i.e., $|\lambda_j| = 1$ para todo $j = 1, 2, 3$.

(b) Dado que $i^3 = -i$, obtenemos al desarrollar la primera columna del determinante

$$Q(X) = P(iX) = \det(iX\mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} iX & 0 & -i \\ -i & iX & 0 \\ 0 & -i & iX \end{vmatrix} = i^3 \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = -i(X(X^2) - (-1)(-1)) = -i(X^3 - 1).$$

Luego, las raíces de Q son las raíces cúbicas de la unidad dadas por $\omega := \exp(\frac{2\pi i}{3})$, ω^2 y $\omega^3 = 1$. Así, las raíces de $P(X) = Q(-iX)$ están dadas por $\lambda_j = i\omega^j$ para $j = 1, 2, 3$. Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = i\omega^2$ y $\lambda_3 = i\omega^3 = i$, donde $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$.

(c) Calculamos $\ker(A - i\beta\mathrm{I}_3)$ resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} -i\beta & 0 & i \\ i & -i\beta & 0 \\ 0 & i & -i\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z - \beta x \\ x - \beta y \\ y - \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y obtenemos que $v_\beta = (1, \beta^2, \beta) \in \mathbb{C}^3$ es un vector propio asociado a $\lambda = i\beta$, para todo $\beta \in \{\omega, \omega^2, \omega^3\}$.

(d) El teorema espectral asegura que los vectores propios $v_\omega = (1, \omega^2, \omega), v_{\omega^2} = (1, \omega, \omega^2), v_{\omega^3} = (1, 1, 1)$ son ortogonales entre sí. Así, basta normalizar dividiendo por la norma de cada vector para obtener una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$

$$\mathscr{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

para la cual se tiene

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & i\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Problema 5 (33 puntos)

El objetivo de este problema es introducir el concepto de **sucesión exacta** de espacios vectoriales, y probar un resultado importante que afirma que al tensorizar una sucesión exacta de espacios vectoriales obtenemos nuevamente una sucesión exacta.

Sea k un cuerpo y sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una colección de k-espacios vectoriales indexada por los números enteros, i.e., para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que V_n es un k-espacio vectorial. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ consideramos una aplicación lineal $f_n : V_n \to V_{n+1}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

es una **sucesión exacta** si $\ker(f_n) = \mathrm{Im}(f_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sean V_1, V_2 y V_3 tres k-espacios vectoriales de dimensión finita y sean $f : V_1 \to V_2$ y $g : V_2 \to V_3$ dos aplicaciones lineales. Consideremos la sucesión (S) dada por

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \to 0,$$

donde 0 denota el k-espacio vectorial nulo, y la aplicación lineal $0 \to V_1$ (resp. $V_3 \to 0$) está dada por $0 \mapsto 0 \in V$ (resp. $v_3 \mapsto 0$ para todo $v_3 \in V_3$). Durante todo el problema asumiremos que (S) es exacta.

(a) Demostrar que f es inyectivo, g es sobreyectivo, y $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$. Deducir que $g \circ f = 0$.

(b) Sea W un k-espacio vectorial de dimensión finita y consideremos la sucesión $(S) \otimes W$ definida por

$$0 \to V_1 \otimes W \xrightarrow{F} V_2 \otimes W \xrightarrow{G} V_3 \otimes W \to 0,$$

donde $F = f \otimes \mathrm{Id}_W$ y $G = g \otimes \mathrm{Id}_W$. Demostrar que $G \circ F = 0$ y luego $\mathrm{Im}(F) \subseteq \ker(G)$. Deducir que existe una aplicación lineal $\widehat{G} : V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F)) \to V_3 \otimes W$.

(c) Probar que F es inyectivo y que G es sobreyectivo.
Indicación: Para la inyectividad, considerar una base de W.

(d) Para demostrar la inclusión $\ker(G) \subseteq \mathrm{Im}(F)$, consideraremos la aplicación

$$h : V_3 \times W \longrightarrow V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$$

construída de la manera siguiente: si $(v_3, w) \in V_3 \times W$ entonces (gracias al punto (a)) existe $v_2 \in V_2$ tal que $g(v_2) = v_3$ y considerar $h(v_3, w)$ como la imagen de $v_2 \otimes w$ en el cociente $V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$. Demostrar que h está bien definida[8] y que induce una aplicación lineal

$$\widehat{h} : V_3 \otimes W \longrightarrow V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$$

que es la inversa de $\widehat{G}$. Concluir que $\ker(G) = \mathrm{Im}(F)$ y por ende que la sucesión $(S) \otimes W$ es exacta.
Indicación: Para concluir que $\ker(G) = \mathrm{Im}(F)$ *considerar* $\ker(\widehat{G})$.

Solución:

(a) Por definición, la sucesión (S) es exacta si y sólo si

(i) La imagen de $0 \to V_1$, dada por $0 \in V_1$, coíncide con el kernel de f. En otras palabras, $\ker(f) = 0$ y luego f es inyectiva.

(ii) Se cumple $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

(iii) La imagen de g coincide con el kernel de $V_3 \to 0$, que está dado por V_3. En otras palabras, $\mathrm{Im}(g) = V_3$ y luego g es sobreyectiva.

En particular, por el punto (ii), para todo $v_1 \in V_1$ se tiene $g(f(v_1)) = 0$, pues $f(v_1) \in \mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

(b) Sea $v_1 \otimes w \in V_1 \otimes W$. Entonces, la imagen de $v_1 \otimes w$ en $V_2 \otimes W$ es $F(v_1 \otimes w) = f(v_1) \otimes w$, y la imagen de este último tensor en $V_3 \otimes W$ es $G(f(v_1) \otimes w) = g(f(v_1)) \otimes w$. Dado que la sucesión (S) es exacta, tenemos que $g(f(v_1)) = 0$ y luego $G \circ F = 0$. En particular, $\mathrm{Im}(F) \subseteq \ker(G)$. Luego, la propiedad universal del cociente implica que existe una única aplicación lineal

$$\widehat{G} : V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F)) \to V_3 \otimes W$$

tal que $\widehat{G}([v_2 \otimes w]) = g(v_2) \otimes w$, donde $[v_2 \otimes w]$ es la clase de $v_2 \otimes w$ en el cociente $V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$.

(c) Para la inyectividad de F consideramos $(w_1, \dots, w_n)$ una base de W. Entonces, para todo $j = 1, \dots, n$ y todo $v_1 \in V_1$ se tiene que $F(v_1 \otimes w) = f(v_1) \otimes w = 0$ si y sólo si $f(v_1) = 0$. Dado que f es inyectivo, tenemos que $v_1 = 0$ y luego $v_1 \otimes w = 0$. Para la sobreyectividad de G, notamos que para todo $v_3 \in V_3$ existe $v_2 \in V_2$ tal que $g(v_2) = v_3$, pues g es sobreyectivo. Luego, para todo $v_3 \in V_3$ y todo $w \in W$ se tiene $v_3 \otimes w = g(v_2) \otimes w = G(v_2 \otimes w)$, y luego G es sobreyectivo.

(d) Veamos que h está bien definida. Para esto, sean v_2 y v_2' son dos vectores en V_2 tales que $g(v_2) = g(v_2') = v_3$, y veamos que la imagen de $v_2 \otimes w$ y $v_2' \otimes w$ es la misma en el cociente $V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$:

Dado que $g(v_2) = g(v_2') = v_3$ tenemos que $v_2 - v_2' \in \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$, por lo que existe $v_1 \in V_1$ tal que $v_2 - v_2' = f(v_1)$. Luego, $v_2 \otimes w - v_2' \otimes w = (v_2 - v_2') \otimes w = f(v_1) \otimes w = F(v_1 \otimes w) \in \mathrm{Im}(F)$. Equivalentemente, $[v_2 \otimes w] = [v_2' \otimes w]$ en el cociente $V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$.

[8]Es decir, si v_2 y v_2' son dos vectores en V_2 tales que $g(v_2) = g(v_2') = v_3$ entonces la imagen de $v_2 \otimes w$ y $v_2' \otimes w$ es la misma en el cociente $V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$.

Por otro lado, la aplicación h es bilineal y por ende, gracias a la propiedad universal del producto tensorial, induce una única aplicación lineal

$$\widehat{h} : V_3 \otimes W \longrightarrow V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$$

tal que $\widehat{h}(v_3 \otimes w) = h(v_3, w) = [v_2 \otimes w]$, donde $v_2 \in V_2$ es cualquier vector tal que $g(v_2) = v_3$. Luego, si escribimos $\widehat{h}(v_3 \otimes w) = [g(v_2) \otimes w]$ con $g(v_2) = v_3$, entonces es claro que $\widehat{h}$ es la inversa de $\widehat{G}$ dada por $\widehat{G}([v_2 \otimes w]) = g(v_2) \otimes w$:

$$\widehat{h}(\widehat{G}([v_2 \otimes w])) = \widehat{h}(g(v_2) \otimes w) = [v_2 \otimes w] \quad \text{y} \quad \widehat{G}(\widehat{h}(v_3 \otimes w)) = \widehat{G}([v_2 \otimes w]) = [g(v_2) \otimes w] = v_3 \otimes w.$$

Luego, $\widehat{G}$ y $\widehat{h}$ son isomorfismos. En particular, $\ker(\widehat{G}) = \ker(G)/\mathrm{Im}(F) = 0$ en $V_2 \otimes W/(\mathrm{Im}(F))$, i.e., $\ker(G) = \mathrm{Im}(F)$. Concluímos de este modo que la sucesión $(S) \otimes W$ es exacta.

Bonus (30 puntos)

(B1) Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n. Recordemos[9] que el **espacio proyectivo** asociado a V es el conjunto cuyos elementos son los sub-espacios vectoriales de dimensión 1 de V. Explícitamente,

$$\mathbb{P}(V) = \{L \subseteq V \mid \dim_k(L) = 1\}.$$

De manera más general, para todo $d \in \{1, \ldots, n-1\}$ definimos la **grassmanniana** $\mathrm{Gr}(d, V)$ como el conjunto cuyos elementos son los sub-espacios vectoriales de dimensión d de V, i.e.,

$$\mathrm{Gr}(d, V) := \{W \subseteq V \mid \dim_k(W) = d\}.$$

Probar que la función

$$\varphi : \mathrm{Gr}(d, V) \longrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^d V), W \mapsto \textstyle\bigwedge^d W \subseteq \textstyle\bigwedge^d V$$

está bien definida y es biyectiva sobre su imagen.
Indicación: Notar que la imagen de φ es el conjunto de rectas de $\bigwedge^d V$ generadas por tensores simples.

Solución: Si $W \subseteq V$ es de dimensión d, entonces $\dim_k(\bigwedge^d W) = \binom{d}{d} = 1$, por lo que $\bigwedge^d W \in \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ es una recta en $\bigwedge^d V$, y luego φ está bien definida. Más aún, si $(w_1, \ldots, w_d)$ es una base de W, entonces la recta $\bigwedge^d W$ está generada por el tensor simple $w_1 \wedge \cdots \wedge w_d$. Recíprocamente, toda recta en $\bigwedge^d V$ generada por un tensor simple $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \neq 0$ define un sub-espacio vectorial $W := \mathrm{Vect}_k(v_1, \ldots, v_d)$ de dimensión d de V.

Cultura general: Si $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$, $\mathrm{Gr}(d, n)$ es una *variedad* de dimensión $d(n-d)$. Más aún, la función φ es llamado el *incrustamiento de Plücker* y permite ver a $\mathrm{Gr}(d, n)$ como una *sub-variedad* del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\bigwedge^d V) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}$. Además, $\mathrm{Gr}(d, n)$ es intersección de hipersuperficies cuádricas.

(B2) Probar que el grupo especial unitario $\mathbf{SU}(2)$ está dado por

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{C} \text{ tales que } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Deducir que existe una biyección entre $\mathbf{SU}(2)$ y la esfera real de dimensión 3 en $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Solución: Seguimos el mismo método que utilizamos en §37 del curso para deducir la forma de elementos de $\mathbf{O}(2)$, es decir, consideramos una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ y escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

[9] Ver Certamen 2, Problema 5.

con $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{\overline{\delta}} \begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

donde $\delta = \det(A) = ad - bc$. Luego, la identidad $A^*A = \mathrm{I}_2$ y $\delta = 1$ implica que $d = \overline{a}$ y $c = -\overline{b}$, comparando las primeras columnas de A y $(A^*)^{-1}$. En particular, $1 = ad - bc = |a|^2 + |b|^2$. Por otro lado, la igualdad $\det(A) = \delta = 1$ implica que las igualdades $\overline{b} = -c$ y $\overline{a} = d$, obtenidas al comparar las segundas columnas, son equivalentes a las obtenidas al comparar las primeras columnas. Así,

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \text{ con } a,b \in \mathbb{C} \text{ tales que } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

En particular, escribiendo $a = x_1 + ix_2$ y $b = x_3 + ix_4$, con $x_j \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$\varphi : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^3, \ (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

la biyección deseada.

(B3) En $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x,y,z,t) respecto a la base canónica $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ consideramos los vectores $v_1 = (1,1,1,0)$ y $v_2 = (1,2,1,2)$. Calcular el producto exterior $v_1 \wedge v_2 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^6$ y deducir que v_1 y v_2 son linealmente independientes. Considerando un vector arbitrario $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3$ y calculando el producto $v_1 \wedge v_2 \wedge v \in \bigwedge^3 \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$, deducir ecuaciones del plano $\Pi = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subseteq \mathbb{R}^4$.

Solución: Escribimos $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$ y $v_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + 2e_4$. Luego, calculamos $v_1 \wedge v_2$ usando el hecho que $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, y en particular $e_i \wedge e_i = 0$:

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 &= (e_1 + e_2 + e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 + e_3 + 2e_4) \\ &= 2e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + 2e_1 \wedge e_4 + \underbrace{e_2 \wedge e_1}_{=-e_1 \wedge e_2} + e_2 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_4 + \underbrace{e_3 \wedge e_1}_{=-e_1 \wedge e_3} + \underbrace{2e_3 \wedge e_2}_{=-2e_2 \wedge e_3} + 2e_3 \wedge e_4 \\ &= e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_4 + 2e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

Así, dado que $v_1 \wedge v_2 \neq 0$ en $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ tenemos que v_1 y v_2 son linealmente independientes. Finalmente, calculamos para $v = (x,y,z,t)$ el producto

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 \wedge v &= (e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_4 + 2e_3 \wedge e_4) \wedge (xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) \\ &= ze_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + te_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + 2y \underbrace{e_1 \wedge e_4 \wedge e_2}_{=-e_1 \wedge e_2 \wedge e_4} + 2z \underbrace{e_1 \wedge e_4 \wedge e_3}_{=-e_1 \wedge e_3 \wedge e_4} - x \underbrace{e_2 \wedge e_3 \wedge e_1}_{=e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} \\ &\quad - te_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + 2x \underbrace{e_2 \wedge e_4 \wedge e_1}_{=e_1 \wedge e_2 \wedge e_4} + 2z \underbrace{e_2 \wedge e_4 \wedge e_3}_{=-e_2 \wedge e_3 \wedge e_4} + 2x \underbrace{e_3 \wedge e_4 \wedge e_1}_{=e_1 \wedge e_3 \wedge e_4} + 2y \underbrace{e_3 \wedge e_4 \wedge e_2}_{=e_2 \wedge e_3 \wedge e_4} \\ &= (z - x)e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + (2x - 2y + t)e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + (2x - 2z)e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + (2y - 2z - t)e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$

Luego, $\Pi = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - x = 2x - 2y + t = 0\}$.

(B4) Sean V y W dos k-espacios vectoriales de dimensión finita. En particular, la aplicación lineal

$$\varphi : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, W)$$

que envía cada tensor simple $f \otimes w$ en la aplicación lineal $V \to W$, $v \mapsto f(v)w$ es un isomorfismo[10]. Probar que el número máximo de tensores simples necesarios para expresar un elemento arbitrario de $V \otimes W$ es $\min\{\dim_k(V), \dim_k(W)\}$. En otras palabras, si definimos el **rango** de un tensor $T \in V \otimes W$ como

$$r(T) := \min\left(n \in \mathbb{N} \mid \exists (v_1, \ldots, v_n) \in V^n, \ (w_1, \ldots, w_n) \in W^n \text{ tal que } T = \sum_{j=1}^{n} v_j \otimes w_j \right),$$

[10] En general, para un tensor arbitrario $T = f_1 \otimes w_1 + \ldots + f_r \otimes w_r \in V^* \otimes W$ con $f_1, \ldots, f_r \in V^*$ y $w_1, \ldots, w_r \in W$, tenemos que $\varphi(T)$ es la aplicación lineal $V \to W$ que envía $v \mapsto f_1(v)w_1 + \ldots + f_r(v)w_r$.

probar que el entero $\max_{T\in V\otimes W} r(T)$ es $\min\{\dim_k(V), \dim_k(W)\}$.
Indicación: Considerar el isomorfismo $\Phi : V \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V^*, W)$.

Solución: Usando el isomorfismo $\Phi : V \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V^*, W)$ notamos que por definición $r(T) = \mathrm{rg}(\Phi(T))$ coincide precisamente con el rango de la aplicación lineal $\Phi(T) : V^* \to W$. En particular, $r(T) \leq \min\{\dim_k(V^*), \dim_k(W)\} = \min\{\dim_k(V), \dim_k(W)\}$. Luego,

$$\max_{T\in V\otimes W} r(T) = \min\{\dim_k(V), \dim_k(W)\}.$$

Cultura general: El problema más general sobre el número maximal de tensores simples necesarios para escribir un elemento arbitrario de $V_1\otimes\cdots\otimes V_d$, donde los V_j son k-espacios vectoriales de dimensión finita, es un problema muy difícil para $d \geq 3$. De hecho, es un problema abierto y la respuesta depende del cuerpo k.

(B5) Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ un espacio vectorial complejo de dimensión n. Entonces, todo elemento de la potencia simétrica S^dV se escribe como suma de tensores simples de la forma $v\cdots v = v^d$, donde $v \in V$. Probar que todo elemento de S^2V se escribe como la suma de a lo más n tensores simples de la forma v^2.
Indicación: Identificar S^2V con el espacio vectorial de formas cuadráticas complejas.

Solución: Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de V, entonces el álgebra simétrica $SV \cong \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ es isomorfa al álgebra de polinomios en n variables, donde el isomorfismo está dado por $e_i \mapsto X_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. En particular, S^2V es isomorfo al espacio vectorial de polinomios homogeneos de grado 2 en las variables $X_1, \ldots, X_n$, i.e., formas cuadráticas $Q(X_1, \ldots, X_n)$. Luego, el método de reducción de Gauss nos dice que cada Q es suma de a lo más n formas lineales independientes. Equivalentemente, todo tensor en S^2V se escribe como suma de a lo más $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ tensores simples.

Cultura general: El problema más general sobre el número maximal de tensores simples necesarios para escribir un elemento arbitrario de S^dV, donde V es un k-espacio vectorial de dimensión n es conocido como el **problema de Waring**. Para n y d arbitrarios sólo conocemos la respuesta a esta importante pregunta cuando el tensor a descomponer es "genérico", gracias a los trabajos de Alexander y Hirschowitz en los años 90, pero no para todos los tensores.

(B6) Sean V y W dos k-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $u : V \to W$ una aplicación lineal. Supongamos que el rango de u es $\mathrm{rg}(u) = r \in \mathbb{N}$. Probar que para todo $d \in \{1, \ldots, r\}$ se tiene que el rango de $\bigwedge^d u : \bigwedge^d V \to \bigwedge^d W$, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \mapsto u(v_1) \wedge \cdots \wedge u(v_d)$ es $\binom{r}{d}$.

Solución: Por definición, la imagen de $\bigwedge^d u$ es $\bigwedge^d(\mathrm{Im}(u)) \subseteq \bigwedge^d W$ y luego

$$\mathrm{rg}\left(\bigwedge^d u\right) = \dim_k \bigwedge^d(\mathrm{Im}(u)) = \binom{\dim_k(\mathrm{Im}(u))}{d} = \binom{r}{d}.$$

Observación: Este cálculo también demuestra que si $d > r$ entonces $\bigwedge^d u = 0$.