Certamen 1 – Álgebra Lineal Avanzada (MAT210, 2025-1)

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Madeline Castro

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (30 puntos)

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, y considere la matriz

$$A(a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

El objetivo de este ejercicio es calcular $V(a_1, \ldots, a_n) := \det(A(a_1, \ldots, a_n))$.

(a) (10 pts) Considere el polinomio $P(X) := V(a_1, \ldots, a_{n-1}, X) \in \mathbb{R}[X]$. Determine el grado de P y su coeficiente principal, asumiendo que $V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$.

(b) (10 pts) Justifique que cada $a_1, \ldots, a_{n-1}$ es una raíz de P, y use esto para deducir una factorización de P.

(c) (10 pts) Usando inducción en $n \geq 2$ determine el valor de $V(a_1, \ldots, a_n)$, y deduzca que $A(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si y sólo si todos los $a_1, \ldots, a_n$ son diferentes.

Solución:

(a) Al desarrollar $V(a_1, \ldots, a_{n-1}, X)$ respecto a la última columna obtenemos una expresión de la forma $P(X) = (-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot C_0 + (-1)^{n+2} \cdot X \cdot C_1 + \ldots + (-1)^{n+n} \cdot X^{n-1} \cdot C_{n-1}$ donde cada $C_j \in k$ y donde por definición $C_{n-1} = V(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Dado que $C_{n-1} \neq 0$, tenemos que $P(X)$ es un polinomio de grado $n-1$.

(b) Por propiedades del determinante, si dos columnas se repiten entonces el determinante es 0. Luego, $P(a_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Así, P es un polinomio de grado $n-1$ con $n-1$ raíces $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y por ende (por división euclideana de polinomios) tenemos que $P(X) = C_{n-1}(X - a_1) \cdots (X - a_{n-1})$, i.e., $P(X) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, X) = V(a_1, \ldots, a_{n-1})(X - a_1) \cdots (X - a_{n-1})$.

(c) Para $n = 2$ calculamos $V(a_1, a_2) = (a_2 - a_1)$. Luego, $P(a_3) = V(a_1, a_2, a_3) = V(a_1, a_2)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$ y de manera similar, por inducción, obtenemos $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$. Así, $\det(A(a_1, \ldots, a_n)) \neq 0$ si y sólo si $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$.

Problema 2 (30 puntos)

Durante este problema, considere

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ una matriz } \textbf{fija}.$$

Considere el endomorfismo $u : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),\ M \mapsto AM$.

(a) (10 pts) Determine $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, con $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$ base canónica dada por matrices elementales E_{ij}.

(b) (10 pts) Calcule $\det(u)$, y pruebe que $u \in \mathrm{GL}(M_2(\mathbb{R}))$ si y sólo si $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(c) (10 pts) Suponga que A es una matriz diagonal, ¿es u diagonalizable?.

Solución: Recuerde que

$$E_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{ y } E_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esta notación, tenemos que:

(a) Calculamos $u(E_{11}) = aE_{11} + cE_{21}$, $u(E_{12}) = aE_{12} + cE_{22}$, $u(E_{21}) = bE_{11} + dE_{21}$ y $u(E_{22}) = bE_{12} + dE_{22}$, y así

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

(b) Desarrollando por las primeras columnas obtenemos $\det(u) = a(ad^2 - bcd) + c(-abd + b^2c) = ad(ad - bc) - bc(ad - bc) = (ad - bc)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \det(A)^2$, y luego $\det(u) \neq 0$ si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

(c) Si A es diagonal $b = c = 0$ y luego $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ es diagonal, y por ende u es diagonalizable.

Problema 3 (30 puntos)

Sea V un k-espacio vectorial de $\dim_k(V) = n \geq 2$, y sea $u : V \to V$ un endomorfismo. Decimos que un sub-e.v. $W \subseteq V$ es **estable por** u si $u(W) \subseteq W$ (i.e., $u(w) \in W$ para todo $w \in W$). Supondremos durante todo este problema que los **únicos** sub-espacios vectoriales estables por u son $W = \{0\}$ y $W = V$.

(a) (10 pts) Pruebe que u no posee valores propios.

Indicación: Pruebe que si $\lambda \in k$ es un valor propio, entonces necesariamente $u = \lambda \operatorname{Id}_V$, y llegue a una contradicción considerando la recta $W_v = \operatorname{Vect}_k(v)$ generada por cualquier vector $v \neq 0$.

(b) (10 pts) Pruebe que para todo vector no-nulo $x \in V \setminus \{0\}$, la familia $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ es una base de V.

Indicación: Suponga que son linealmente dependientes, y considere $p \leq n-1$ y escalares $a_0, \ldots, a_{p-1} \in k$ tales que $u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$. Llegue a una contradicción, considerando $W = \operatorname{Vect}_k(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ y usando el hecho que $\{0\}$ y V son los únicos sub-e.v. estables por u.

(c) (10 pts) Demostrar que $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_x}(u)$, donde $\mathscr{B}_x := (x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ es la base construída en el ítem (b), es independiente de la elección de $x \in V \setminus \{0\}$, i.e., si $y \in V \setminus \{0\}$ entonces $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_x}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_y}(u)$.

Indicación: Considere $b_0, \ldots, b_{n-1} \in k$ tales que $u^n(x) = b_0 x + b_1 u(x) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(x)$ y escriba $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_x}(u)$ usando dichos escalares. Justifique que $u^n(u^i(x)) = b_0 u^i(x) + b_1 u(u^i(x)) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(u^i(x))$ para todo $i \geq 1$, y utilice esto para deducir que necesariamente $u^n(y) = b_0 y + b_1 u(y) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(y)$.

Solución:

(a) Si $\lambda \in k$ es un valor propio entonces $V_\lambda = \{v \in V,\ u(v) = \lambda v\}$ es no-nulo y es estable por u. Luego, por hipótesis, $V_\lambda = V$ y por ende $u(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$, i.e., $u = \lambda \operatorname{Id}_V$. Como $\dim_k(V) \geq 2$, la recta $W_v = \operatorname{Vect}_k(v)$ generada por cualquier vector $v \neq 0$ cumple $u(W_v) \subseteq W_v$ (pues u solamente reescala vectores) y luego tendríamos un sub-e.v. estable por u que no es nulo y no es todo V, una contradicción.

(b) Si $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$ son l.d. y escribimos $u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$ donde $p \leq n-1$ es el máximo entero tal que esto es posible (y por ende $p < n$). Sea $W = \operatorname{Vect}_k(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ y notar que $u(x) \in W$, $u(u(x)) \stackrel{\text{def}}{=} u^2(x) \in W, \ldots, u(u^{p-1}) = u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{p-1} u^{p-1}(x) \in W$, i.e., $u(W) \subseteq W$ y por ende deberíamos tener que $W = \{0\}$ (imposible pues $x \neq 0$) o $W = V$ (imposible pues $p \leq n-1$).

(c) Dado que $\mathscr{B}_x$ es una base, existen $b_0, \ldots, b_{n-1} \in k$ tales que $u^n(x) = b_0 x + b_1 u(x) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(x)$ y luego, por definición, tenemos que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_x}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dado que $\mathscr{B}_x$ es una base de V, cualquier $y \in V$ se escribe de la forma $y = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x)$ para únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in k$. Para determinar $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_y}(u)$, con $\mathscr{B}_y = (y, u(y), \ldots, u^{n-1}(y))$ calculamos

$$\begin{aligned} u(u^{n-1}(y)) &\stackrel{\text{def}}{=} u^n(y) = u^n\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^n(u^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(u^n(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(b_0 x + b_1 u(x) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(x)) \\ &= b_0 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x)\right) + b_1 u \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x)\right) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x)\right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} b_0 y + b_1 u(y) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(y). \end{aligned}$$

Luego, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_x}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_y}(u)$.

Problema 4 (20 puntos)

Durante este problema puede usar directamente (sin demostración) el hecho siguiente:

> **Hecho:** Sea $u : V \to V$ endomorfismo de un $\mathbb{C}$-e.v. de dimensión finita $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. Si $P_u(X) = \det(X \operatorname{Id}_V - u) \in \mathbb{C}[X]$ es el polinomio característico de u y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de u, entonces $\dim_{\mathbb{C}}(V_\lambda) \leq m_\lambda$, donde m_λ es la multiplicidad de $\lambda \in \mathbb{C}$ como raíz del polinomio P_u.

Sea $n \geq 2$ y sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ matriz de $\operatorname{rg}(A) = 1$. Pruebe que A es diagonalizable si y sólo si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Indicación: Recuerde que $P_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$. Notar además que si $\lambda = 0$ entonces $V_\lambda = \ker(A)$.

Solución: Por el Teorema del Rango, $\dim_{\mathbb{C}} V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} \ker(A) = n-1$, y luego $\lambda = 0$ es una raíz de multiplicidad $\geq n-1$ y luego $P_A(X) = X^{n-1}(X - a)$ para algún $a \in \mathbb{C}$. Expandiendo, deducimos que $a = \operatorname{tr}(A)$ y luego: si $\operatorname{tr}(A) = 0$ (resp. $\operatorname{tr}(A) \neq 0$) entonces $\dim_{\mathbb{C}} V_0 < n$ y por ende no hay una base de vectores propios asociados al único valor propio (resp. existe un vector propio $v \neq 0$ asociado a $a \neq 0$ y luego $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_a$ y por ende existe una base de vectores propios de A).