Ayudantia #1: Repaso de Primer Año
MAT-210: Algebra Lineal
Semestre 2025-1

Profesor: Pedro Montero **Ayudante:** Madeline Castro

En lo que sigue fijamos $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. V, W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente.

P1) Recordando que podemos definir una matriz entrada por entrada con la notación $A = (a_{ij})$, definimos una matriz triangular superior (resp. inferior) a toda matriz cuyas entradas se rigen por:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \geq j \text{ (resp. } i \leq j) \\ \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(a) Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular cuyos valores en la diagonal son 0, entonces $A^{n+1} = 0$

(b) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A^r = 0$ para algun $r > 0$. Demuestre que $I + A$ es invertible con inversa dada por:
$$I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^{r-1}A^{r-1}$$

P2) Sean $V_1, V_2 \subseteq V$ dos subespacios vectoriales.

(a) Probar que $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de V.

(b) Demostrar, mediante un contraejemplo, que $V_1 \cup V_2$ no siempre es un subespacio vectorial de V.

(c) Demostrar que $V_1 \cup V_2$ es un subespacio vectorial de V **si y solo si** $V_1 \subseteq V_2$ ó $V_2 \subseteq V_1$.

P3) El objetivo de este problema es empezar a estudiar algunos espacios vectoriales importantes a traves de entender sus bases, para esto primero haremos uso de un teorema muy general, para el cual tendremos que usar un lema elemental (¡pero nada facil!) de teoria de conjuntos.

Lema de Zorn: Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal. (¿Que acabo de leer?)

(a) Sea $W \subseteq V$ un subespacio vectorial. Pruebe que toda base de W puede ser extendida a una base de V, es decir, dada *cualquier* base B_W de W, podemos elegir alguna base de V (B_V) que cumpla que $B_W \subset B_V$.

(b) Sea $V_1 + V_2$ el espacio vectorial generado por $V_1 \cup V_2$. Ocupando el item anterior probar que:
$$\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$$

Indicación: Para este problema hay que recordar un pequeño resultado de conteo de conjuntos finitos, sean A, B dos conjuntos finitos cualquiera, entonces tenemos la siguiente igualdad sobre sus cardinalidades:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(c) Probar que dado un subespacio vectorial V_1 de V, siempre existe otro subespacio vectorial V_2 de V tal que $V_1 \cap V_2 = 0$ y $V_1 + V_2 = V$.

P4) En este ultimo problema vamos a repasar algunos conceptos de matrices asociadas a transformaciones lineales, para esto recordar que dadas dos bases B y B' de un mismo espacio vectorial, escribimos como $\mathrm{Mat}_B(B') \in M_n(\mathbb{K})$ a la matriz cambio de base, en la clase de repaso 2 pueden revisar la manera explicita en la que calculamos esta ultima.

(a) Demostrar que $\mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{Id}_V)$ y $\mathrm{Mat}_{B'}(B) = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{Id}_V)$, verificar que estas matrices son inversas una de otra.