Orientación e integración en variedades.

§0. Recordatorio y preliminares.

(*) Sea M^n una variedad con coordenadas locales (x_i), una k-forma es

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

con $\omega_{i_1, \ldots, i_k} \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

(*) Sea $f : M \longrightarrow N$ suave y $\alpha \in \Omega^k N$, el pullback de α por f en $p \in M$ se define como

$$\begin{aligned}(f^*\alpha)_p(v) &= \Lambda^k (d_p f)^t(\alpha)(v) \\ &= \alpha_{f(p)}(d_p f(v)^t).\end{aligned}$$

(*) El diferencial de funciones suaves suaves se extiende de manera única a $\Omega^\bullet M = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k M.$

Si $a = A\,dx + B\,dy \in \Omega^1 \mathbb{R}^2$, entonces

$$da = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

(*) Particiones de la unidad.

Sea M^n una variedad, luego M es numerable al infinito, y por tanto para cualquier cubrimiento abierto $\{U_i\}$, tiene una partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento, esto es, una colección de funciones suaves $\{X_i : M \to \mathbb{R}\}$ tales que:

1. $X_i \geq 0$
2. $\operatorname{supp} X_i \subset U_i$
3. $\operatorname{supp} X_i$ son localmente finitos
4. $\sum_i X_i = 1.$

(*) Variedades con frontera

Sea

$$\mathbb{H}^m = \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1} = \{(x_1, \dots, x_m) : x_1 \leq 0\}.$$

Una variedad con frontera, se define de la manera que lo hicimos excepto que permitimos que algunas cartas tomen valores en abiertos (relativos) de $\mathbb{H}^m$.

Sea M^n una variedad con frontera, definimos la frontera de M, ∂M como

$$\partial M = \left\{ p \in M : \text{existe una carta } (U, \varphi) \text{ con } p \in U \text{ y } \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^m \right\}.$$

A las cartas de la definición anterior se les llama cartas frontera.

El atlas

$$\left\{ \left(U \cap \partial M, \varphi|_{U \cap \partial M}\right) : \begin{array}{l}(U,\varphi) \text{ es una carta} \\ \text{frontera de } M\end{array} \right\}$$

define a ∂M como una subvariedad de M.

Observación: Lo usual es tomar $\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

§ 1. Orientación

Una orientación puede pensarse como una elección entre dos maneras no equivalentes en las cuales un objeto puede situarse respecto a su entorno.

Ejemplos:

1) $\mathbb{R}$ orientación positiva "hacia la derecha"
2) $\mathbb{R}^2$, para una base ordenada (v_1, v_2), es que v_2 esté en sentido levógiro de v_1
3) En el caso de $\mathbb{R}^3$, la orientación positiva es dada por la "regla de la mano derecha".

4) Para $V = P_2 = \{\text{polinomios de grado} \leq 2\}$.

¿ Cuál es el análogo a la orientación dada por la mano derecha?

Definición:

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. Diremos que dos bases ordenadas $(E_1, .., E_n)$ y $(E_1', .., E_n')$ son consistentemente orientadas si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo.

Una orientación para V es una clase de equivalencia de bases ordenadas bajo esta relación.

Proposición:

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $\omega \in \Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$, entonces ω define una orientación para V

$$\mathcal{O}_\omega = \left\{ \begin{array}{l} (E_1, \dots, E_n) \text{ base ordenada de } V \\ \text{tal que } \omega(E_1, \dots, E_n) > 0 \end{array} \right\}$$

$\blacksquare$

Como $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}$, cada n-forma sobre $\mathbb{R}^n$ es proporcional a $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Luego, en M^n con coordenadas locales (x^i), $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ es una n-forma sobre M, pero si cambiamos coordenadas $(x^i) = \phi(y^i)$, entonces

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} dy^1\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x^n}{\partial y^n} dy^n\right)$$

$$= \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

$$= J(\phi)\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.$$

De manera general, si

$\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, entonces

$$\phi^* \omega = (\phi^* f)\, J(\phi)\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.$$

Luego, dos n-formas inducen la misma orientación de la Proposición sobre $T_x M$ si y sólo si $J(\phi) > 0$. Esto motiva la siguiente definición:

<u>Definición:</u>

Una variedad es orientable si para

cada par de cartas U_i, U_j no disjuntas existen coordenadas locales (x^i) para U_i (y^j) para U_j tales que $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y^j}\right) > 0$.

Ejemplo:

1) $\mathbb{R}^n$, S^n son orientables.
2) La banda de Möebius $[0,1] \times \mathbb{R} / (1,t) \sim (0,-t)$ no es orientable.

<u>Definición</u>:

Si M^n es orientada, una forma de volumen sobre M es una n-forma que es positiva en cualquier punto. $\blacksquare$

<u>Proposición</u>:

Una variedad orientada siempre tiene una forma de volumen. $\blacksquare$

Para construirla, tomemos en coordenadas locales $\omega_i = dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n$ y una partición de la unidad (χ_i) subordinada a $\{U_i\}$. Luego,

$$\omega = \sum_i \chi_i \omega_i$$

es una forma de volumen sobre M.

Vemos que tener una forma de volumen sobre M es equivalente a tener una orientación sobre M.

(*) Orientación en la frontera.

Sea M^n una variedad con frontera, $p \in \partial M$ y (x^i) coordenadas locales en un entorno de p.

① Diremos que $X \in T_pM$ apunta hacia afuera si $x_1 > 0$. Siempre existe $X \in \Gamma(TM)$ tal que $X|_{\partial M}$ apunta hacia afuera.

Si M^n es orientable, podemos orientar ∂M como sigue:

Sea $X \in \Gamma(TM)$ que apunte hacia afuera y diremos que una base $(E_1, \dots, E_{n-1})$ para $T_p \partial M$ está orientada si $(X_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ es una base orientada para M.

<u>Proposición</u>:

Todas los vectores que apuntan hacia afuera inducen la misma orientación sobre ∂M llamada la orientación de Stokes. ∎

Ejemplo: Para S^{n-1}, $x^i\frac{\partial}{x^i}$ es un vector que apunta hacia afuera. Luego la orientación de S^{n-1} es la usual.

§2. Integración.

Sea M^n una variedad orientada ω una n-forma sobre M. Supongamos primero que ω tiene soporte compacto en el dominio de una carta (U,φ). Definimos el integral de ω sobre M

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

Observación: Si (x^i) son coordenadas locales entonces $(\varphi^{-1})^*\omega = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ y

$$\int_M \omega = \int f\,dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

Proposición:

Con ω como antes, $\int_M \omega$ no depende de la elección de la carta cuyo dominio contiene a $\operatorname{supp} \omega$. $\blacksquare$

Para extender esta definición, tomemos una n-forma ω con soporte compacto y (χ_i) una partición de la unidad subordinada a los U_i y definamos

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \chi_i \omega .$$

Proposición: $\int_M \omega$ no depende de la elección de la partición de la unidad ni del cubrimiento. Además cumple

i) $\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta$, $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) Si $-M$ representa a M con la orientación opuesta,

$$\int_M \omega = -\int_{-M} \omega . \quad \blacksquare$$

Teorema de Stokes: Si M^n es una variedad orientada con frontera y ω es una n-forma con soporte compacto, $i : \partial M \longrightarrow M$ es la inclusión, entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega .$$

$\blacksquare$

Corolario: Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ es un incrustamiento suave de manera que $S = \gamma([a,b])$ es una subvariedad de dimensión 1 y $f \in C^\infty(M)$, entonces

$$\int_\gamma df = \int_{[a,b]} \gamma^* df = \int_S df = \int_{\partial S} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad \blacksquare$$

Corolario: Sea D un dominio compacto regular en $\mathbb{R}^2$ y A, B funciones suaves sobre D.

Entonces
$$\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} A\,dx + B\,dy.$$

Corolario:
Si M es una variedad compacta sin frontera y α es una n-forma exacta, esto es $\alpha = d\beta$ para alguna $(n-1)$-forma β, entonces
$$\int_M d\alpha = 0.$$

Como
$$H^n_{dR}(M) = \frac{\{\alpha \in \Omega^n M : d\alpha = 0\}}{\{d\beta : \beta \in \Omega^{n-1} M\}},$$
tenemos que
$$\int : H^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto \int_M \omega$$
está bien definida y es un isomorfismo.