

FORMAS DIFERENCIALES.

§0: Formas Lineales.

Sea V un espacio vectorial n -dimensional, definimos los tensores de tipo (r,s) o (r,s) -tensores como los elementos del producto tensorial

$$V_s^r := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s =: V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$$

r-términos s-términos

Obs: Este espacio se identifica con las aplicaciones $(r+s)$ multilineales sobre $(V^*)^r \times V^s$.

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base para V , luego la base dual $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ para V^* y $\{e_i\}$ nos permiten obtener una base para V_s^r de elementos de la forma:

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{k_1}^* \otimes \dots \otimes e_{k_s}^*, \text{ para } 1 \leq i_1, \dots, i_r, k_1, \dots, k_s \leq n.$$

Así, cada elemento $x \in V_s^r$ se escribe como una única combinación lineal de la forma:

$$x = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ k_1, \dots, k_s}} x_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{k_1}^* \otimes \dots \otimes e_{k_s}^*$$

$$\stackrel{\text{(Einstein)}}{=} x_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{k_1}^* \otimes \dots \otimes e_{k_s}^*.$$

Definición: (Álgebra tensorial)

Para un esp. vect. V de dim. n , definimos

$$T^r(V) = V_0^r = V^{\otimes r} \quad (\text{resp. } T^r(V^*) = (V^*)^{\otimes r})$$

y llamamos álgebra tensorial de V (resp. V^*) a la suma

$$T(V) := \bigoplus_{r \geq 0} T^r(V) \quad (\text{resp. } T(V^*) := \bigoplus_{r \geq 0} T^r(V^*))$$

• Definición (Tensor contravariante simétrico/alternante).
 Sea $x \in T^r(V)$, si para toda permutación de orden r , $\sigma \in S(r)$ se tiene que

$$\sigma x = x$$

decimos que x es un tensor simétrico de orden r , denotamos esto por

$$x \in P^r(V).$$

Por otro lado, si para alguna permutación $\sigma \in S(r)$

$$\sigma x = \text{sgn} \sigma \cdot x$$

decimos que x es un tensor alternante de orden r , denotamos esto por

$$x \in \Lambda^r(V).$$

• Definición (Mapeo simetrizante y alternante)

Para todo $x \in T^r(V)$, se define

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} \sigma x, \quad A_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} \text{sgn} \sigma \cdot \sigma x \quad \left. \vphantom{\sum_{\sigma \in S(r)}} \right\} \in T^r(V).$$

Teorema:

$$P^r(V) = S_r(T^r(V)) \quad \text{y} \quad \Lambda^r(V) = A_r(T^r(V)).$$

En adelante, consideraremos las formas alternantes sobre el álgebra tensorial del fibrado cotangente.

• Propiedades:

El producto exterior " $\wedge$ " satisface lo siguiente:

(1) Distributividad

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta$$

(2) Anticommutatividad

$$\eta \wedge \xi = (-1)^{\ell \cdot n} \xi \wedge \eta$$

(3) Asociatividad

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi, \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^k(V) \\ \eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^\ell(V) \\ \zeta \in \Lambda^n(V) \end{array} \right\}$$

Obs: Desde (2):

$$\bullet \eta, \xi \in \Lambda^1 V \Rightarrow \eta \wedge \xi = -\xi \wedge \eta \Rightarrow \eta \wedge \eta = -\eta \wedge \eta = 0.$$

(2)

Obs: La dimensión de $\Lambda^r V$, con $\dim(V) = n$ es:

$$\dim(\Lambda^r V) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

§1: Formas diferenciales en variedades:

Si $\{x^i\}_{i=1}^n$ son coordenadas locales para M^n , tenemos una base de 1-formas $\{dx^i\}_{i=1}^n$ para $\Omega^1(M)$. Usando estos elementos podemos escribir k -formas como combinaciones lineales de k productos exteriores entre 1-formas

$$\Omega^k(M) \ni \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \underbrace{\omega_{i_1 \dots i_k}(x)}_{\in \mathcal{C}^\infty(M)} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Más geométicamente $\Lambda^k(\Omega M)$ es un fibrado vectorial sobre M cuya fibra $\Lambda^k(T_p^* M)$ para un punto $p \in M$ corresponde al espacio de k -formas sobre el esp. tangente.

• Definición: (Álgebra exterior).

LLamamos álgebra exterior de la variedad diferencial M^n a la suma directa

$$\Omega^\bullet M = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k M$$

que es una suma finita, pues $\dim(\Omega^k M) = 0, \forall k \geq n$.

NOTACIÓN:

$$(1) \Omega^k M := \Lambda^k(T^* M) := \Gamma(\Lambda^k T^* M)$$

$$(2) \Omega^0 M = \mathcal{C}^\infty(M)$$

Sea $f: M \rightarrow N$ una función suave. De este modo

$$df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

es una aplicación lineal que para $\alpha \in \Omega^k(M)$ permite definir el pullback de α por f sobre M en el punto p :

$$(f^* \alpha)_p(v) = \Lambda^k(df_p)(\alpha)(v) = \alpha(df_p(v)).$$

Si consideramos $\alpha \in \Omega^r(M)$ y $\beta \in \Omega^s(M)$, entonces:

$$\begin{aligned} f^*(\alpha \wedge \beta)(v) &= (\alpha \wedge \beta)(df(v_1), \dots, df(v_r), df(v_{r+1}), \dots, df(v_{r+s})) \\ &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sgn} \sigma \cdot \alpha(df(v_{\sigma_1}), \dots, df(v_{\sigma_r})) \cdot \beta(df(v_{\sigma_{r+1}}), \dots, df(v_{\sigma_{r+s}})) \\ &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sgn} \sigma \cdot \underbrace{(f^*\alpha)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_r})}_{\text{}} \cdot \underbrace{(f^*\beta)(v_{\sigma_{r+1}}, \dots, v_{\sigma_{r+s}})}_{\text{}} \\ &= (f^*\alpha \wedge f^*\beta). \end{aligned}$$

Considerar el campo vectorial
 $(X_1, \dots, X_p)$

y la K -forma $\omega \in \Omega^k(M)$, podemos definir una forma
 $\mathcal{L}^\infty(M)$ -lineal sobre $\Gamma(TM)$ de campos vectoriales como

$$(X_1, \dots, X_p) \longrightarrow \omega(X_1, \dots, X_p)$$

Recíprocamente:

Toda K -forma elemento $\mathcal{L}^\infty(M)$ -lineal α sobre $\Gamma(TM)$
 es inducida por una K -forma diferencial suave.

Esto pues si L es tal forma lineal, localmente.

$$(1) X_j = X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Entonces por $\mathcal{L}^\infty(M)$ -linealidad

$$L(X_1, \dots, X_k) = \sum X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k} L\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right).$$

§2: Diferencial Exterior:

Una derivada (odd derivation) sobre el álgebra exterior $\Omega^*\Gamma$ es una aplicación

$$D: \Omega^*\Gamma \longrightarrow \Omega^*\Gamma$$

que satisface la identidad de Leibniz modificada

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge (D\beta)$$

Decimos que D es de grado d si $D(\Omega^k\Gamma) = \Omega^{k+d}\Gamma$.

Lemma:

El diferencial de funciones suaves se extiende de forma única a una derivada sobre $\Omega^*\Gamma$ que satisface:

$$(1) d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2, \quad \forall w_1, w_2 \in \Omega^*\Gamma$$

(2) Si $w_1 \in \Omega^*\Gamma$, entonces:

$$d(w_1 \wedge dw_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^r w_1 \wedge dw_2$$

(3) Si $f \in \Omega^0\Gamma = C^\infty(\Gamma)$, entonces df corresponde al diferencial de f usual.

$$(4) \text{ Si } f \in \Omega^0\Gamma, \text{ entonces } d(df) = 0.$$



(5)

La extensión del lema anterior se denomina diferencial exterior.

Teorema: (Lema de Poincaré)

$d^2 = 0$; es decir, para cualquier forma diferencial exterior w se tiene que $d^2 w = d(dw) = 0$.

dem

Como d es un operador lineal, podemos considerar w como un monomio en coordenadas locales $\{x^i\}_{i=1}^n$

$$w = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$$

$$\Rightarrow dw = da \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$$

De este modo

$$\begin{aligned} d^2 w = d(dw) &= d(da) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r \\ &+ (-1)^1 da \wedge d(dx^1) \wedge \dots \wedge dx^r \\ &+ (-1)^2 da \wedge dx^1 \wedge d(dx^2) \wedge \dots \wedge dx^r \\ &\vdots \\ &+ (-1)^r da \wedge \dots \wedge d(dx^r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo: Suponer que las coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$ son dadas por (x, y, z) .

(a) Si f es una función suave, entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3).$$

El vector $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) =: \text{grad } f$ es el gradiente de f .

(2) Suponer que $a = A dx + B dy + C dz$, con $A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$
entonces:

$$da = dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) \wedge dy$$

$$+ \left(\frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz \right) \wedge dz$$

$$= \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy +$$

$$+ \frac{\partial B}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial C}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial y} dy \wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) dx \wedge dz.$$

Si $\vec{X} = (A, B, C)$, el vector:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right)$$

es el rotor del campo vectorial $\vec{X}$.

(3) Suponer que $a = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$

Entonces:

$$da = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy$$

$$= \frac{\partial A}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial C}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= \text{div}(X) \cdot dx \wedge dy \wedge dz.$$

Del lema de Poincaré concluimos que:
 Si f es una función suave sobre $\mathbb{R}^3$ y que $\vec{X}$ es un campo vectorial tangente suave sobre $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$(1) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

$$(2) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{X}) = 0.$$

§3: Cohomología de De Rham

Definición:

Llamamos complejo a una colección de esp. vect. (anillos, módulos, etc) en cadenas como

$$\dots \rightarrow V_i \xrightarrow{f^i} V_{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} V_{i+2} \rightarrow \dots$$

De tal manera que

$$\operatorname{Im}(f^i) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{i+1}), \text{ es decir, } f^i \circ f^{i+1} = 0.$$

Definición: (Cohomología de De Rham)

Definimos el complejo de De Rham como el complejo de formas diferenciales sobre una variedad diferencial M^n con la derivada exterior como diferencial:

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0?$$

Así, se define el k -ésimo grupo de cohomología de De Rham como el cociente:

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\{\alpha \in \Omega^k(M) : d\alpha = 0\} \rightarrow \text{formas cerradas}}{\{d\beta, \beta \in \Omega^{k-1}(M)\} \rightarrow \text{formas exactas.}}$$

Decimos además que

$$H_{dR}^0(M) = \mathbb{R}^{\# \text{componentes conexos de } M}.$$

Obs:

(1) Localmente

$$d\alpha = 0 \Rightarrow \exists \beta : d\beta = \alpha$$

Esto nos dice que $H_{dR}^k(M)$ es independiente de las prop. locales de M .

(2) $H_{dR}^K(M)$ es un invariante topológico de M .

(3) [Cartan-Serre (53)] Si M es compacta, entonces $H_{dR}^K(M)$ es de dimensión finita y su dimensión

$$b_K(M) = \dim H_{dR}^K(M)$$

se denomina K -ésimo número de betti de M .