— Métricas con curvatura constante. —

Si la variedad (M^n, g) tiene curvatura seccional constante:

<u>Lema:</u> En coordenadas normales exp^*g coincide con la métrica de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$.

De donde se puede deducir que

<u>Corolario:</u> M^n es localmente isométrica a $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$. Además si es conexa y simplemente conexa, entonces M^n es exactamente igual a $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$.

Recordatorio

Sea $E \to M$ un fibrado vectorial, una conexión es un operador

$$\nabla : \Gamma(M, E) \longrightarrow \Omega^1(M, E)$$

tal que

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s$$

para toda $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(M, E)$.

Sean (x^i) coordenadas locales para M y (e_i) una base local para las secciones de E.

Pongamos

$$\nabla e_a = \Gamma_{ia}^{b} dx^i \otimes e_b$$

Luego, si $s = s^a e_a$,

$$\nabla s = ds^a \otimes e_a + s^a \nabla e_a$$
$$= ds^a \otimes e_a + s^a \left(\Gamma_{ia}^{b}\, dx^i \otimes e_b \right)$$
$$= \frac{\partial s^a}{\partial x^i}\, dx^i \otimes e_a + s^b\, \Gamma_{ib}^{a}\, dx^i \otimes e_a$$
$$= \left(\frac{\partial s^a}{\partial x^i} + \Gamma_{ib}^{a}\, s^b \right) dx^i \otimes e_a$$

Luego, en esta trivialización

$$\nabla = d + \Gamma_i\, dx^i,$$

donde $\Gamma_i = (\Gamma_{ib}^{a})$ o

$$\nabla = d + A,$$

donde $A = \Gamma_i\, dx^i$, un endomorfismo de E.

Esto significa que

$$\nabla s = ds + As$$
$$= ds + \Gamma_i s \otimes dx^i$$

donde la sección s es vista como vector columna.

A la 1-forma $A = dx^i \otimes \Gamma_i$ que tiene valores en $End(E)$ se le llama 1-forma de conexión.

Si (f_b) es otra base local de secciones de E,

$$f_b = u^a_b e_a, \quad u^a_b \in GL_n.$$

Luego, $s = s^a e_a$ tiene coordenadas us en la base (f_b), así

$$\nabla s = d(us) + dx^i \Gamma_i us$$

y volviendo a la base (e_a),

$$\nabla s = u^{-1}\left(d(us) + dx^i \Gamma_i us\right),$$

de donde

$$\nabla = u^{-1} A u + u^{-1} du. \qquad (1)$$

— . Curvatura de una conexión . —

Sea (E, ∇) un fibrado sobre M con curvatura ∇, X, Y campos vectoriales locales en M y $s = s^a e_a \in \Gamma(M, E)$.

Considere

$$\Gamma_{X,Y} s = \left(d\Gamma^a_b(X,Y) + \Gamma^a_{Xc}\Gamma^c_{Yb} - \Gamma^c_{Xb}\Gamma^a_{Yc}\right) s^b \frac{\partial}{s^a}$$

donde el primer término es el diferencial de la aplicación

$$\Gamma_a^b : X \longmapsto \Gamma_{X a}^b .$$

Escrito en forma más concisa

$$F_{X,Y} = (d\Gamma)_{X,Y} + [\Gamma_X, \Gamma_Y]$$
$$= dA(X,Y) + (A\wedge A)(X,Y),$$

es decir,

$$F = dA + A\wedge A.$$

F es una 2-forma con valores en $\mathrm{End}(E)$ llamado la curvatura de ∇. Suele denotarse por $F(\nabla)$ o F^∇. En lo sucesivo F denotará la curvatura de la conexión.

Si hacemos el cambio de base $f_b = u e_b$, usando (1) obtenemos que $F \longmapsto u^{-1} F u$.

— · Motivación de F · —

Ya nos hemos encontrado con

Lema:

Si (E, ∇) es un fibrado vectorial con conexión ∇ sobre M y $c(t) \in M$ un camino, $s(t) \in E_{c(t)}$ una sección de E sobre c. Entonces $\nabla_{\dot{c}(t)} s(t)$ depende sólo de $s(t)$.

La versión infinitesimal de este proceso de levantamiento es la siguiente: Si $X = c'(0) \in T_x M$, definimos el levantamiento horizontal en $s_0 \in E_x$ como

$$\tilde{X} = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Se calcula que

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](s) = \widetilde{[X,Y]}(s) - F_{X,Y}\, s.$$

—— . Extensión de la conexión . ——

La conexión

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(E),$$

se puede extender para $k \geq 1$

$$d^\nabla : \Omega^k(E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(E)$$

Poniendo de manera recursiva

$$d^{\nabla}(\alpha\otimes s) = d\alpha\otimes s + (-1)^{k}\alpha\wedge d^{\nabla}s$$

donde $\alpha\in\Omega^{k}(\Sigma)$ y $s\in\Gamma(M)$.

En coordenadas locales donde $\nabla = d+A$,

$$d^{\nabla}\alpha = d\alpha + A\wedge\alpha.$$

La diferencial cumple $d\circ d = 0$, la curvatura de la conexión mide cuánto falla esto en la extensión.

<u>Lema:</u> $F^{\nabla} = d^{\nabla}\circ d^{\nabla}$.

<u>Prueba:</u> Sea $\nabla = d+A$ localmente, luego

$$\begin{aligned} d^{\nabla}(d^{\nabla}s) &= d^{\nabla}((d+A)s) \\ &= (d+A)(ds+As) \end{aligned}$$

$$= (d \circ d)s + d(As) + A \wedge ds + A \wedge As$$

$$= (dA + A \wedge A)s.$$

<u>Proposición</u>: (Identidad de Bianchy).

$$d^{\nabla} F^{\nabla} = 0.$$

— Polinomios invariantes. —

Sea $P : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice invariante si

$$P(B^{-1}AB) = P(A), \quad \forall B \in GL_n(\mathbb{C}).$$

<u>Lema</u>:

Ser invariante es equivalente a

$$P(AB) = P(BA), \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{C}).$$

Ejemplos:

det y tr (determinante y traza) son polinomios invariantes.

Sea $X \in M_n(\mathbb{C})$, luego

$$\det(I + tX) = 1 + t\sigma_1(X) + t^2\sigma_2(X) + \cdots + t^n\sigma_n(X).$$

con I = Identidad en $M_n(\mathbb{C})$.

Definamos $s_i(X) = \operatorname{tr} X^i$, $i = 1, \ldots, n$.

Tenemos que $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2$, ..., i.e., $s_i = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, con f un polinomio.

Hecho:

Cualquier polinomio invariante puede ser escrito como sumas y productos de los s_i.

Si X es Hermitiana, entonces es diagonalizable y si $x = (x_1, \dots, x_n)$ son sus autovalores,

$$\det(I + tX) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t x_i)$$

y en este caso $s_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^i$ y $\sigma_i(X)$ es el i-ésimo polinomio simétrico de x.

Si P_K es un polinomio invariante de grado K, entonces

$P_K(F)$ es una $2K$-forma

que está definida globalmente pues

$$P_K(u^{-1}Fu) = P_K(F), \quad \forall u \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Lema:

$$d(P(\alpha)) = P(d^{\nabla}\alpha)$$

para toda j-forma α.

Proposición: $P(F)$ es una forma cerrada y no depende en cohomología de la conexión ∇ en E.

La primera parte se sigue de que $d(P(F)) = P(d^{\nabla}F) = P(0)$, usando el Lema anterior y la identidad de Bianchy. La segunda parte significa que si ∇^1 y ∇^2 son dos conexiones en E, entonces existe una $2k-1$ forma β tal que

$$P(F^{\nabla^1}) - P(F^{\nabla^2}) = d\beta.$$

Así, $P_k(F) \in H^{2k}(M, \mathbb{C})$.

Clases de Chern.

Sea $E \longrightarrow M$ un fibrado vectorial de rango r. Definimos la clase total de Chern usando el homomorfismo de Chern-Weil

$$F \longmapsto \det\left(I + \frac{i}{2\pi} F\right).$$

$$C(E) = C_0 + C_1 + \cdots + C_r.$$

Luego,

$$c_0(E) = c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{i}{2\pi} \operatorname{tr} F,$$

$$c_2 = -\frac{1}{8\pi^2} \left(\operatorname{tr} F \wedge \operatorname{tr} F - \operatorname{tr} F \wedge F \right), \ldots$$

Se demuestra que $c_K \in H^{2K}(M, \mathbb{R})$.

Propiedades:

Sea $f: N \to M$ suave y, E, G fibrados sobre M. Entonces

(i) Naturalidad:

$$c(f^*E) = f^*c(E)$$

(ii) Suma de Whitney

$$c(E \oplus G) = c(E) \wedge c(G).$$

Si $x_1, \dots, x_r$ son los autovalores de $\frac{i}{2\pi} F$, $c(E) = \prod_{i=1}^{r} (1 + x_i)$.

Otras clases características:

- La clase de Todd

$$td(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}$$

- Los L-polinomios

$$L(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i}{\tanh x_i}$$

- Los $\hat{A}$-polinomios

$$\hat{A}(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)}$$

Todos estos son invariantes topológicos.

· Clase de Euler ·

Sea $X \in M_{2r}(\mathbb{R})$ antisimétrica.

Considere el Pfaffian de X

$$Pf(X) = \frac{1}{2^r r!} \sum_{\sigma \in Sym_{2r}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{r} X_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}$$

Notación de Einstein

$$= \frac{(-1)^r}{2^r r!} \varepsilon^{i_1 j_1 i_2 j_2 \cdots i_r j_r} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_2} \cdots X_{i_r j_r}$$

Propiedades:

1) $\det X = (pf(X))^2$

2) $pf(A^t B A) = Pf(B) \cdot \det(A)$.

Definimos la clase de Euler de E como $e(E) = Pf(F^\nabla)$.

Si M es orientable, las matrices de transición de TM son elementos de $SO(2r)$, luego tenemos que $e(TM)$ es un objeto definido globalmente.

Sea $b_p = \dim H^p(M)$, la característica de Euler de M se define como

$$\chi(M) = \sum_p (-1)^p b_p.$$

<u>Proposición</u> (Gauss-Bonnet):

Si M^{2n} es compacta y orientable

$$\chi(M) = \int_M e(TM).$$