

Segunda forma fundamental

— Recordatorio y preliminares. —

- 1) Sea (M, g) una variedad Riemanniana, $p \in M$ y $\sigma \subset T_p M$ un plano conteniendo al origen. Se definió la curvatura seccional de M en σ como

$$K(\sigma) = \frac{R(u, v, v, u)}{\|u\|_g^2 \|v\|_g^2 - \langle u, v \rangle_g^2}$$

donde (u, v) es una base de σ y

R es el tensor de Riemann dado por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle_g.$$

(cf. curvatura y curvatura riemanniana).

Vimos que $K(\sigma)$ es independiente de la base $\{u, v\}$ de σ y que

$\{K(\sigma) : \sigma \in \text{Gr}(T_p M, 2)\}$ determina el tensor R en p .

2) Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana orientable y $N^{n-1} \subset M$ una subvariedad. Un vector normal a N es un campo vectorial $\vec{n} \in TM \setminus TN$ tal que $\forall p \in N, \|\vec{n}_p\|_g = 1$ y $\vec{n}_p \perp T_p N$.

3) Lema de Gauss (cf. Aplicación exponencial y T. de Hopf-Rinow

$\partial_r = \frac{x^i}{r(x)} \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un vector normal
 a las esferas geodésicas en $U \setminus \{p\}$
 donde $\Sigma_b = \exp_p(2B_b(0))$ es una
 esfera geodésica de radio b .

En coordenadas normales

$$\Sigma_b = \{ (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = b^2 \} \subseteq M.$$

Luego, $\forall w \in T_q M$ tangente a Σ_b en
 q , $q \in U \setminus \{p\}$, $\langle w, \partial_r|_q \rangle_g = 0$,

lo que implica que

$g = db^2 + g_b$ con g_b la
 métrica inducida en Σ_b .

4) Lema: Sean $X, Y \in TN$. Entonces se

puedan extender a un entorno de N
de manera que $[X, Y] = 0$.

5) Sea $p \in N$, $X \in T_p N$ y (U, ϕ) una
carta de M en p tal que $\phi(U \cap N)$
 $= \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

En esta carta, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ con
 $X^i \in C^\infty(U \cap N)$.

Definamos $\tilde{X}(\phi^{-1}(x, y)) := X^i(\phi^{-1}(x, 0)) \frac{\partial}{\partial x^i}$,

luego, $\tilde{X}|_{N \cap U} = X$.

6) Proposición: Sea $p \in N$ y $\pi: T_p M \rightarrow T_p N$

la proyección ortogonal. Entonces

$$\nabla^N = \pi \circ \nabla^M$$

La idea es tomar $X, Y, Z \in TN$ y extenderlos a un abierto U de M ,

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ con } \tilde{X}^i|_{U \cap N} = X^i \text{ para } i \leq n-1$$

$$\text{y } \tilde{X}^i|_{U \cap N} = 0 \text{ para } i = n \text{ y } \dots \text{ para } Y, Z$$

Luego,

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = [X, Y] \text{ y}$$

$$g_p^M(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g_p^N(X, Y), \quad \forall p \in U \cap N.$$

Se usa la fórmula que da la unicidad

de la conexión de Levi-Civita para

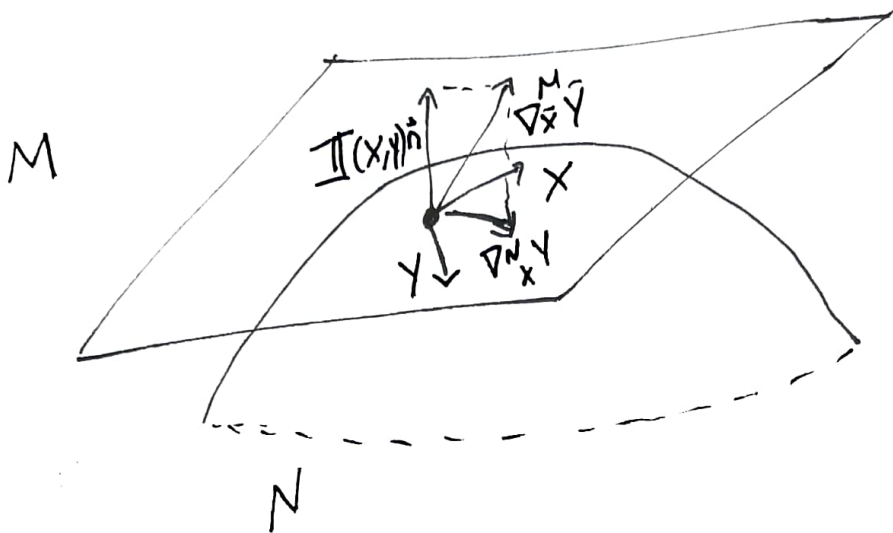
obtener

$$g^M(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}, \tilde{Z}) = g^N(\nabla_X^N Y, Z)$$

en $U \cap N$.

de donde deducimos

$$\nabla_x^u \gamma = \nabla_x^N \gamma + \Pi(x, \gamma) \vec{n}. \quad (1)$$



Como ∇^M es la conexión Levi-Civita,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

luego usando (1) obtenemos

$$\mathbb{I}(x, y) = \mathbb{I}(y, x)$$

Además en (1) aplicamos la métrica,
obtenemos

$$\Pi(x, y) = \langle \nabla_x^M y, \vec{n} \rangle$$

— Segunda forma fundamental. —

Def. La aplicación $\mathbb{I}(X, Y) = \langle \nabla_X^M Y, \vec{n} \rangle$ define un tensor simétrico llamado la segunda forma fundamental de N .

Como la conexión de Levi-Civita es una conexión métrica

$$\mathcal{L}_X \langle Y, \vec{n} \rangle = \langle \nabla_X^M Y, \vec{n} \rangle + \langle \nabla_X \vec{n}, Y \rangle,$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(X, Y) &= \langle \nabla_X^M Y, \vec{n} \rangle \\ &= - \langle \nabla_X \vec{n}, Y \rangle, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la fórmula

$$\mathbb{I} = - \nabla^M \vec{n}.$$

Considere la función

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R} \times N &\longrightarrow M \\ (r, x) &\longmapsto \exp_x(r\vec{n}).\end{aligned}$$

Luego, ϕ es un difeomorfismo de un entorno de $\{0\} \times N \subset \mathbb{R} \times N$ en un entorno de $N \subset M$.

Por definición de $\exp_x$, ϕ le asigna a cada punto $x \in N$ una geodésica que es ortogonal a N y la parametriza por su longitud de arco.

Lema: (de Gauss) Las geodésicas normales a N son ortogonales a las superficies $\phi(\mathbb{R} \times N)$.

Luego,

$\phi^*g = dr^2 + g_r$ donde g_r es una familia de métricas en N .

Nótese que en $\phi(\{r\} \times N)$, $\vec{n}$ se identifica con $\frac{\partial}{\partial r}$.

Sean $X, Y \in TN$ y extendámoslos a un entorno de N , luego como

$$[\vec{n}, X] = \nabla_{\vec{n}} X - \nabla_X \vec{n},$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} II(X, Y) &= -\langle \nabla_X \vec{n}, Y \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\vec{n}} X, Y \rangle + \langle [\vec{n}, X], Y \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\vec{n}} X, Y \rangle \end{aligned}$$

Por simetría,

$$\mathbb{I}(X, Y) = - \langle \nabla \vec{n} Y, X \rangle,$$

luego,

$$\mathbb{I}(X, Y) = -\frac{1}{2} (\langle \nabla \vec{n} X, Y \rangle + \langle \nabla \vec{n} Y, X \rangle)$$

$$= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \langle X, Y \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \vec{n} \cdot \langle X, Y \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} g_r(X, Y) \Big|_{r=0}$$

Luego,

$$\mathbb{I} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} g_r \Big|_{r=0}.$$

Considera A definida por

$$\mathbb{I}(X, Y) = g(A(X), Y), \text{ i.e., } A(X) = -\nabla_X^\perp \vec{n}.$$

Note que

$$\langle A(X), \vec{n} \rangle = \langle -\nabla_X \vec{n}, \vec{n} \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \langle X, \vec{n} \rangle$$

$$= 0$$

con lo cual

$$A: T_p N \longrightarrow T_p N,$$

así, podemos pensar a $\mathbb{II}$ como

una forma cuadrática o como

un endomorfismo de N_p llamado el endomorfismo de Weingarten.

Luego,

$$A = g^{-1} \mathbb{II} = -\frac{1}{2} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial r}$$

Lema: Sean $X, Y \in TN$.

$$K^N(X \wedge Y) = K^M(X \wedge Y) + \frac{\mathbb{II}(X, X) \mathbb{II}(Y, Y) - \mathbb{II}(X, Y)^2}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

_____ . Superficies en $\mathbb{R}^3$. _____

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, los autovalores de $\mathbb{II}$ son llamados la curvatura principal de S .

Tomando una base ortonormal, obtenemos

$$\begin{aligned} K^S &= K^{\mathbb{R}^3} + \det II \\ &= \det II \\ &= \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Con λ_1, λ_2 los autovalores de II y que son llamados las curvaturas principales de S . Dichas curvaturas dependen del incrustamiento $S \subset \mathbb{R}^3$ pero K^S depende sólo de la geometría intrínseca de S : Teorema Egregium de Gauss.

A $H = \lambda_1 + \lambda_2$ se le llama curvatura media. Si $H = 0$, se dice que S es minimal.

Sea S dada por la ecuación

$z = f(x, y)$, luego una base para

$T_p S$ es

$$\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0, \partial_x f)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = (0, 1, \partial_y f)$$

Luego,

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 1 + (\partial_x f)^2$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \partial_x f \partial_y f$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 1 + (\partial_y f)^2$$

Además

$$\vec{n} = \frac{(-\partial_x f, -\partial_y f, 1)}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}}$$

Además en $\mathbb{R}^n$, la conexión de Levi-Civita

$$\text{es } \nabla_X Y = dY(X) \quad \text{donde } X, Y$$

son pensadas como funciones de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

luego,

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \Pi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ &= (0, 0, \partial_{xx}^2 f) \cdot \vec{n} \\ &= \frac{\partial_{xx}^2 f}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\Pi_{12} = \frac{\partial_{xy}^2 f}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}}$$

$$\Pi_{22} = \frac{\partial_{yy}^2 f}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}}$$

Luego,

$$K^S = K^{\mathbb{R}^3} + \frac{\det \Pi_{ij}}{\det g_{ij}}$$

$$K^S = \frac{\partial^2_{xx} f \partial^2_{yy} f - (\partial^2_{xy} f)^2}{(1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2)^2}$$

Note que el procedimiento es
válido tomando S una superficie

paramétrica

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

En este ejemplo tomamos

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$