Función Exponencial y Teorema de Hopf-Rinow

Sea (M,g) una variedad Riemanniana y ∇ la conexión de Levi-Civita.

Recordar Una curva $\gamma: [a,b] \to M$ es una geodésica si:

(i) $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ [resuelve un sist. de ec. localm] $\Leftrightarrow$

(ii) Si $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b) \Rightarrow L(\gamma) = d(x,y)$

donde $L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$ $\quad d(x,y) = \inf\{L(\alpha) / \alpha \text{ une } x \text{ e } y\}$

DEF: Una geodésica $\gamma: I \to M$ se dice maximal si no puede ser extendida a una geodésica en un intervalo más grande, e, si: $\nexists\, \tilde\gamma: \tilde I \to M$, $\tilde I \supset I$ tq $\tilde\gamma|_I = \gamma$.

$\Rightarrow$ Para cada $p \in M$ y $v \in T_pM$ existe una única geodésica maximal $\gamma: I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$, donde I es un intervalo abierto que contiene al 0.

Se denota γ_v. $\to$ tiene que ver con la unicidad de la sol. del sist. de ec.

QUEREMOS ESTUDIAR CÓMO CAMBIAN LAS GEODÉSICAS SI VARIAMOS EL PUNTO INICIAL O LA VELOCIDAD INICIAL.

Lema: $\forall p \in M$, $\forall v \in T_pM$, $\forall c, t \in \mathbb{R}$ $\quad \gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$ (donde ambas estén definidas).

[Se prueba viendo que ambas satisfacen la misma ec. diferencial y tienen las mismas condiciones iniciales].

DEF: $\mathcal{E} \subseteq TM$, el dominio de la aplicación exponencial, está dado por:

$$\mathcal{E} = \{ \underbrace{v \in TM}_{\text{Nótese el abuso de notación}} : \gamma_v \text{ está definida en un intervalo que contiene al } [0,1] \}$$

y la función exponencial geométrica está def. por:

$\exp : \mathcal{E} \to M \quad / \quad \exp(v) = \gamma_v(1)$

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{R}^n$. La exponencial es $\exp_p(v) = v + p$

Y definimos la exponencial restringida a $p \in M$, por

$\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ con dominio $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$.

<u>PROP.</u> (a) $\mathcal{E}$ es un conj. abierto de TM, y $\mathcal{E}_p \subseteq T_pM$ es "estrellado" respecto al 0.

(b) $\forall v \in TM$, la geodésica $\underbrace{\gamma_v(t)}_{=\gamma_{tv}(1)=} = \exp(tv)$ $\forall t$ donde estén def.

(c) exp es función suave

(d) $\forall p \in M$, el diferencial $d(\exp_p)_0 : T_0(T_pM) \simeq T_pM \to T_pM$ es la identidad.

<u>dem (d)</u>: Necesitamos una curva τ en T_pM que empiece en 0 con vel. inicial v. Tomemos $\tau(t) = tv \Rightarrow$

$$d(\exp_p)_0(v) = d(\exp_p)_0(\tau'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\exp_p \circ \tau)(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma_v(t) = v.$$

<u>OBS</u>: Por el Teo de la Función Inversa, como $d(\exp_p)_0$ es invertible $\Rightarrow \exists V$ entorno del 0 en T_pM y $\exists U$ entorno de p en M tal que

$\exp_p : V \to U$ es un difeomorfismo.

En otras palabras, dado $p \in M$ $\exists U$ entorno de p tq:

$\exp_p^{-1} : U \subseteq M \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un difeo $\Rightarrow$ Es una <u>carta</u>!

$(\mathbb{R}^n \simeq T_pM)$

Coordenadas Normales

La función exponencial nos da un sist. de coord. locales "canónico" en M (dada una métrica Riem g). Las coord. obtenidas reciben el nombre de coordenadas normales (centradas en p).

Propiedades: Sea $(U, (x^i))$ una carta coord. centrada en p.

(a) Los coord de p son $(0, \dots, 0)$.

(b) Las componentes de la métrica en p son $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(c) $\forall v \in T_pM$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ la geodésica γ_v tq $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$ se representa en coord. normales por la recta: $\gamma_v(t) = (tv^1, \dots, tv^n)$, $\forall t \in I$, donde I es un intervalo que contiene al 0 y cumple: $\gamma_v(I) \subseteq U$.

(d) Los símbolos de Christoffel son 0 en p.

(e) $\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p g_{ij} = 0$.

dem: $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n) = \exp_p^{-1}$

(a) $\varphi(p) = \exp_p^{-1}(p) = 0$ porque $p = \exp_p(0) = \gamma_v(0)$ ✓

(b) $g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right\rangle_{g_p} = \left\langle d\varphi_p^{-1}(e_i), d\varphi_p^{-1}(e_j) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}$

$(d\varphi_p^{-1} = (d\exp_p)_0^{-1} = id)$

(c)
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma_v"] \arrow[dr, dashed] & M \arrow[d, "\exp_p^{-1}"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\exp_p^{-1} \circ \gamma_v(t) =$

$\exp_p^{-1}(\exp_p(tv)) = tv$

RECORDAR: $X = X^i \partial_{x_i}$ $\quad Y = Y^j \partial_{x_j}$

$\rightarrow \nabla_X Y = \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}$

$\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = \langle X, Y \rangle Z$

↳ De aquí sale ⊛

(d) Ecuación geodésica en coord. locales:

$$\sum_{ij} \ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\,\Gamma_{ij}^k(t) = 0 \quad k = 1, \dots, n.$$

Si $\gamma_v(t) = (tv^1, \dots, tv^n) \Rightarrow \sum_{ij} v^i v^j \Gamma_{ij}^k(tv) = 0$

Como vale $\forall k$ y $\forall$ vector v, evaluando en $t=0$: $\Gamma_{ij}^k(0) v^i v^j = 0$

Tomando $v = \partial_a$ tenemos $\Gamma_{aa}^k = 0$ $\forall a, \forall k \Rightarrow \dots$ $(v = \partial_a + \partial_b,\ v = \partial_a - \partial_b)$

$\Gamma_{ab}^k = 0$, en p $\forall a, b, k$.

(e) Los Christoffel satisfacen: (porque ∇ es comp con la métrica)

$$⊛ \quad \Gamma_{ki}^l g_{li} + \Gamma_{kj}^l g_{il} = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p (g_{ij})$$

Como $\Gamma_{ij}^k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p g_{ij} = 0$ $\forall ijk$.

<u>OBS</u>: De la prop. anterior, parte (c) ~~se deduce que~~ las geodésica que empiezan en un punto $p \in M$ y permanecen dentro de un entorno normal de p son llamadas <u>geodésicas radiales</u>.

$\Rightarrow g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2)$ con r = "rayos de geodésicas cerca de p"

y las derivadas segundas de g_{ij} se interpretan como curvaturas de g.

COMPLETITUD

Sup (M,g) una variedad Riem. conexa $\Rightarrow (M,d)$ es un espacio métrico con $d = \text{dist} = \inf\{L(\alpha)\ldots\}$ y como señalamos la semana pasada: La topología inducida por d coincide con la de (M,g).

Consecuencia: La función distancia $f: M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \text{dist}(p, p_0)$, $p_0 \in M$, es continua.

Sean (x^i) las coord. normales alrededor de p, y sea U una bola geodésica centrada en p.

DEF: La distancia radial $r: U \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$r(x) = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$$

y el vector radial está dado por: $\partial_r = \dfrac{x^i}{r(x)} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

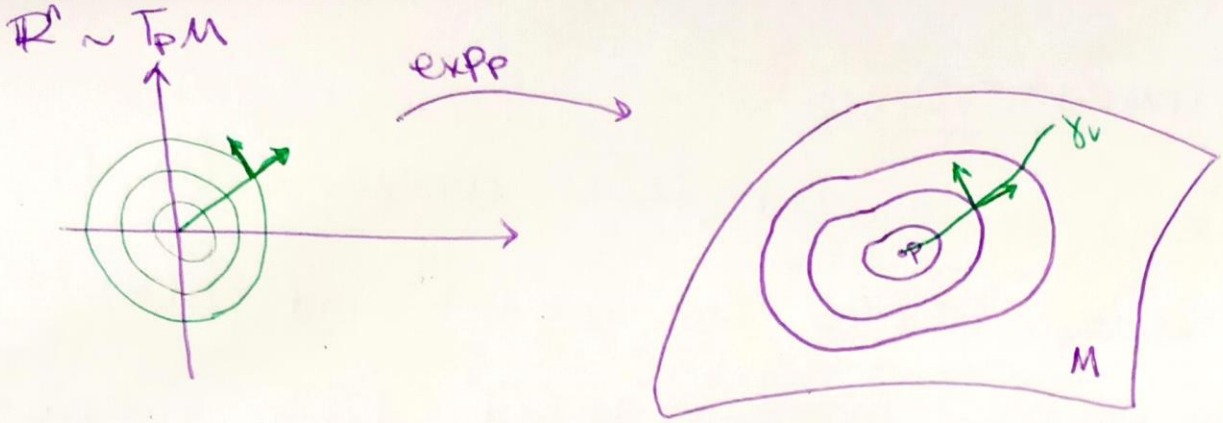
TEO (Lema de Gauss): ∂_r es un campo vectorial unitario ortogonal a las esferas geodésicas en $U \setminus \{p\}$, donde $\Sigma_b = \exp_p(\partial B_b(0))$ es una esfera geodésica de radio b.

En coord. normales: $\Sigma_b = \{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = b^2\} \subseteq M$.

Lo que dice el Lema es que: $\forall w \in T_q M$ tangente a Σ_b en q, $q \in U \setminus \{p\}$ se cumple: $\langle w, \partial_r|_q \rangle_g = 0$.

y que $|\ |_g = 1$.

Consecuencia: Exp es una "isometría radial local".



En otras palabras, la imagen vía la función exponencial del vector radial unitario en T_pM es siempre un vector unitario y la imagen de un vector tangente a una esfera en el origen es siempre ortogonal a la imagen del vector radial.

<u>HECHO</u>: (Consecuencia del Lema de Gauss). Si $\gamma : [0,1] \to U$, U = bola normal de centro p en M y $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q \Rightarrow$ $L(\gamma) = d(p,q)$ → Esto es un resultado local.

Queremos relacionar esta propiedad local con algo global.

<u>DEF</u>: Decimos que M es métricamente completa si es completa como espacio métrico (toda suc. de Cauchy converge). Y decimos que M es geodésicamente completa si toda geodésica maximal está definida globalmente ($\forall t \in \mathbb{R}$).

<u>TEOREMA DE HOPF-RINOW</u>. Sea M una variedad Riemanniana conexa y $p \in M$. Son equivalentes:

(a) $\exp_p$ está definida en todo T_pM.

(b) M es completa como espacio métrico.

(c) M es geodésicamente completo.

Además, estas condiciones implican:

(d) $\forall p, q \in M$ existe una geodésica $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ y $L(\gamma) = d(p,q)$.