Geometría algebraica (Semana 13): "Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas"

<u>Recuerdo</u>: Si X es una variedad alg. lisa:

① Los siguientes son isomorfismos:

(i) $\mathrm{Div}(X) = \{\text{Div. de Cartier}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{WDiv}(X) = \{\text{Div. de Weil}\}$

$$D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\} \longmapsto \hat{D} = \sum_{Y \subseteq X} \nu_Y(f)\cdot Y \quad \text{con } \mathcal{U}_i \cap Y \neq \emptyset$$

(ii) $\mathrm{Pic}(X) = \left\{\begin{matrix}\text{Fibrados} \\ \text{en recta}\end{matrix}\right\}/\sim \;\longrightarrow\; \left\{\begin{matrix}\text{Haces} \\ \text{invertibles}\end{matrix}\right\}$

$$L \longmapsto \mathcal{L}$$

$\mathcal{L}$ es tal que $\mathcal{L}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, L_{|\mathcal{U}})$ secciones.

② Hay un epimorfismo:

$$\pi : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

$$D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\} \longmapsto \mathcal{O}_X(D) \quad (\text{tq. } g_{ij} = f_i/f_j \text{ función de transición})$$

Con núcleo $\{\text{Div. principales}\} = \{(\mathcal{U}_i, f) : f \in \mathrm{Rat}(X)^*\}$.

Así, un divisor de Cartier $D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\}$ se puede presentar como una clase de equivalencia $[(L, s)]$, donde L fibrado en recta con trivialización $\{\mathcal{U}_i\}$, $s_{|\mathcal{U}_i} = f_i e_i$, $e_i \in \mathrm{Rat}(\mathcal{U}_i)^*$.

Tenemos lo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{WDiv}(X) & & \\
D \in \mathrm{Div}(X) \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, mapsto] \arrow[r, mapsto] \arrow[drr, dashed] & \hat{D} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{L}(D) \\
\mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X) \arrow[rr] & & \{\text{Haces invertibles en } X\} \arrow[u, phantom, "\cap"]
\end{tikzcd}$$

"haz asociado a D"

<u>Obs</u>: ① Si $D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\}$, el haz $\mathcal{L}(D)$ es tal que $\mathcal{L}(D)(\mathcal{U}_i)$ es el $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_i)$-módulo libre generado por f_i^{-1}.

(2) Si $D = \{(U_i, f_i)\}$, $\mathcal{L}(-D)$ es el <u>haz de ideales</u> de $\mathcal{L}(D)$.

(3) Dado $\mathcal{F}$ un haz algebraico sobre X, la característica de Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$ es

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F})$$

donde $h^i(X,\mathcal{F}) = \dim_k H^i(X,\mathcal{F})$.

Además, si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ es exacta

$$\Rightarrow \chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H}).$$

(4) (Dualidad de Serre):

Si X es proyectivo, $\dim X = n$, ω_X el haz canónico de X (dado por $\omega_X = \det(\Omega_X^1) = \Lambda^n \Omega_X^1$), E un haz algebraico en X, entonces hay un emparejamiento perfecto

$$H^i(X,E) \times H^{n-i}(X, E^* \otimes \omega_X) \longrightarrow H^n(X, \omega_X) \simeq k$$

En part, si $\dim_k X = 1$ y $E = \mathcal{O}_X$ entonces

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(X, \omega_X).$$

<u>Def</u>: Si X es una curva algebraica proyectiva lisa, irreducible, al número:

$$g = h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \omega_X)$$

lo llamamos el <u>género de X</u>.

<u>En lo que sigue</u>: X es una curva algebraica proyectiva lisa irreducible.

<u>Def</u>: Si $D = \sum_{a \in X} \nu_a \cdot a$ es un divisor en X, el <u>grado</u> de D es

$$\deg(D) = \sum_{a \in X} \nu_a.$$

Teorema (Riemann-Roch): Sea g el género de X y D un divisor en X de grado d y L el haz invertible asociado a D. Entonces

$$\chi(L) = d + 1 - g \qquad (*)$$

Dem: Consideremos el caso $D = 0 \Rightarrow L = \mathcal{O}_X$. Hay que probar

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - g.$$

Pero $\chi(\mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) - h^1(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g$

(Obs: $h^i(X, \mathcal{F}) = 0$ si $i > \dim X = 1$).

Ahora, sea D cualquier divisor y $p \in X$ un punto.

Es suficiente probar que $(*)$ es cierto para $D \Leftrightarrow$ es cierto para $D+p$.

El haz asociado a p, $(p \longmapsto k)$, lo denotamos por $\underline{k(p)}$.

El haz de ideales de $k(p)$ es $\mathcal{L}(-p)$. "haz rascacielos"

Se tiene la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{L}(-p) \to \mathcal{O}_X \to k(p) \to 0$$

Al tensorizar con $\mathcal{L}(D+p)$:

$$0 \to \mathcal{L}(D) \to \mathcal{L}(D+p) \to k(p) \to 0$$

$$\Rightarrow \chi(\mathcal{L}(D+p)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + \chi(k(p))$$

Pero: $\chi(k(p)) = h^0(p, k(p)) = 1$.

$$\Rightarrow \chi(\mathcal{L}(D+p)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + 1.$$

y como $\deg(D+p) = \deg(D) + 1$ se tiene que

$(*)$ cierto para $D \Leftrightarrow (*)$ cierto para $D+p$.

(pues $\chi(\mathcal{L}(D+p)) = \deg(D) + 1 + 1 - g \Leftrightarrow \chi(\mathcal{L}(D)) = \deg(D) + 1 - g$).

⚠ Antes de acabar la prueba, veamos algunas aplicaciones:

Corolario 1 Si $[(L,f)]$ es un div. de Cartier con div. de Weil asociado D $\Rightarrow \deg(D)$ es indep. de f. En part, si D es <u>principal</u> $\Rightarrow \deg(D)=0$.

Def: Sea L un haz invertible sobre X, se define el <u>grado</u> de L por
$$\deg(L) := \chi(L) - \chi(\mathcal{O}_X)$$
(con esto: $\deg(D) = \deg(\mathcal{L}(D))$).

Corolario 2: Si L fibrado en recta en X tal que tiene una sección no nula $\Rightarrow \deg(L) \geq 0$

↳ **Dem**: Si identificamos a L con $\mathcal{L}(D)$ para algún divisor D
$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{L}(D)) \neq 0$.

(Recuerdo:
$$\mathbb{P} H^0(X, \mathcal{L}(D)) \xleftrightarrow{\sim} \{E \in \mathrm{Div}(X) \text{ efectivo tq } E \sim D\}).$$

Hay al menos un $E \in \mathrm{Div}(X)$ efectivo tq $E \sim D$.
$$\deg(L) = \deg(\mathcal{L}(D)) = \deg(D) = \deg(E) \geq 0.$$

Corolario 3: $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos.
$$L \longmapsto \deg(L)$$

Dem:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Div}(X) \arrow[r, "\deg"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\ \mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Div}(X) / \{\mathrm{Div\ principales}\} \arrow[ur, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$
(propiedad universal)

$\blacksquare$

Corolario 4: Si L haz invertible en X tq $\deg(L) > 2g-2$ (con g el género de X), entonces:
$$h^0(X,L) = d+1-g.$$

Dem: Por $(*)$, basta ver que $h^1(X,L) = 0$.

Por dualidad de Serre:
$$\chi(\omega_X) = h^0(X,\omega_X) - h^1(X,\omega_X) = h^1(X,\mathcal{O}_X) - h^0(X,\mathcal{O}_X) = g-1.$$

Por (✱) :

$$\deg(\omega_X) = \chi(\omega_X) - (1-g) = 2g-2 .$$

Como $H^1(X,L) \simeq H^0(X, L^* \otimes \omega_X)^*$

y $\deg(L^* \otimes \omega_X) = \deg(\omega_X) - \deg(L)$
$= 2g-2-d < 0$

$\Rightarrow H^0(X, L^* \otimes \omega_X) = 0$ (Corolario 2).

$\Rightarrow h^1(X,L) = 0$ ∎

<u>Ejemplo</u> (curvas elípticas):

Sup. que X es de género 1 y sea p_0 un punto de X.
Sea $\mathrm{Pic}^0(X)$ el núcleo de $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$. Veamos que

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \\ p &\longmapsto \mathcal{L}(p-p_0) \end{aligned}$$

biyectivo (En part, X puede ser dotada de estructura de grupo).
Sea D divisor de grado 0, por (✱) aplicado a $D+p_0$

$$h^0(X, \mathcal{L}(D+p_0)) = 1+1-1 = 1$$

$\Rightarrow \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{L}(D+p_0))$ es de dim 0.

$\Rightarrow$ Hay un <u>único</u> divisor efectivo $\sim D+p_0$, tal divisor es p (grado 1)

$\Rightarrow \exists!\, p$ tq $D \sim p - p_0$.

En part, si $g=1$, $\mathrm{Pic}\, X \to \mathbb{Z}$ <u>no</u> es inyectivo.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $\mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ inyectivo $\Leftrightarrow g = 0$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Si $g=1 \Rightarrow \omega_X \simeq \mathcal{O}_X$

Corolario 5: Si g es el género de X, entonces
$$g = 0 \iff X \cong \mathbb{P}^1.$$

Idea: Si $X \simeq \mathbb{P}^1 \underset{\text{(visto)}}{\Rightarrow} h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0 \Rightarrow g = 0$.

Sea X tq $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Consideremos un haz invertible L de grado 1 sobre X.
$$h^0(X, L) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Veamos que $H^0(X,L)$ es sin puntos de base, ie, $\forall x \in X$, $\exists s \in H^0(X,L)$ tq $s(x) \neq 0$.

Sea s una sección $\neq 0$ de $H^0(X,L)$ y D el divisor asociado a $[(L,s)]$.
$\deg(D) = 1 \Rightarrow D \sim a$ (punto en X).

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(L) \to \mathcal{O}_D \to 0$$

implica que $\exists t \in H^0(X,L)$ tq $t(a) \neq 0$ (pues $h^0(X,L) = 2$ y $h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$)

Recuerdo:
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos} \\ X \to \mathbb{P}^n \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fibrado en recta } L \to X \\ \text{con sist. lineal } M \subseteq H^0(X,L) \\ \text{de dim } n+1 \text{ sin punto de base} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \exists X \to \mathbb{P}^1$. Se prueba que es un isomorfismo ∎

Fibrados vectoriales algebraicos de rango cualquiera:

Def: Sea E un fibrado vectorial de rango $r \geq 1$. El grado de E es el grado del fibrado en recta $\det(E) = \Lambda^r E$. $(= c_1(E))$.

Teorema (Riemann-Roch): Sea E un fibrado vectorial alg. de rango $r \geq 1$ y de grado $d \in \mathbb{Z}$ sobre una curva alg.-proy lisa irreducible X de genero $g \geq 0$. Entonces:
$$\chi(X, E) = d + r(1-g)$$

Lema: El fibrado E tiene una filtración creciente $F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_r = E$ de subfibrados alg F_i de rango i.

Dem: Para $r=1$ es claro. La categoría de fibr. vect. alg. tiene cocientes. (Prop 1.16, Cap 2).

Por inducción, basta probar que E tiene un subfibrado de rango 1.

(Idea): E coherente

$\Rightarrow$ (Teorema A de Serre): $\exists n$ tq $E(n) = E \otimes \mathcal{O}_X(n)$ es generado por sus secciones globales, es decir:

$$H^0(X, E(n)) \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow E \otimes \mathcal{O}_X(n). \quad \text{sobreyectivo}$$

$$\Rightarrow H^0(X, E(n)) \otimes \mathcal{O}_X(-n) \twoheadrightarrow E.$$

Hay un subfibrado isomorfo a $\mathcal{O}_X(-n)$ de E, que es de rango 1 ■

Dem (RR): Por lema anterior, basta probar que:

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

(Fórmula cierta para E' y E'') $\Rightarrow$ (Cierta para E).

Esto sigue de:

- $\chi(E) = \chi(E') + \chi(E'')$
- $rg(E) = rg(E') + rg(E'')$
- $\det(E) = \det(E') \otimes \det(E'') \Rightarrow \deg(E) = \deg(E') + \deg(E'')$ ■