Geometría algebraica (Semana 12): "Cohomología de $\mathbb{P}^n$, anulación y dualidad"

<u>Recuerdo</u>: Sea $\mathcal{F}$ un haz en un esp. top X, y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ cubr. abierto.
Dado $n \in \mathbb{N}$ y $(i_0, .., i_n) \in I^{n+1}$ escribimos $U_{i_0 \cdots i_n} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}$.
El espacio de <u>n-cocadenas</u> es

$$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, .., i_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_n})$$

<u>Complejo de Čech</u>:

$$0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} \ldots$$

donde $d_n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$(f_{i_0 \cdots i_n}) \longmapsto (g_{i_0 \cdots i_{n+1}})$ con $g_{i_0 \cdots i_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k r(f_{i_0, i_1, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{n+1}})$

Definimos: $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \ker(d^n)$ <u>n-cociclos</u>
$B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \mathrm{Im}(d^{n-1})$ <u>n-cobordes</u>

Se calcula $d^{n+1} \circ d^n = 0$ y luego $B^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Dado $i \geq 0$ definimos $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{F}) := Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

y definimos $H^i(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\substack{\mathcal{U} \text{ cubr.} \\ \text{abierto de } X}} H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{F})$ "i-ésimo grupo de cohomología" (k-esp. vect)

<u>Propiedades importantes</u>:

① $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ secciones globales

② H^i es <u>covariante</u>: Si $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo de haces $\Rightarrow \exists\ H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{G})$.

③ Si $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces (ie, α inyectivo, β sobreyectivo, $\mathrm{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$)

$\Rightarrow \exists$ sucesión exacta (larga) en cohomología

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H})$$
$$\xrightarrow{\Delta^0} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H})$$
$$\xrightarrow{\Delta^1} H^2(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^2} \ldots$$

<u>Def</u>: Sup. que $h^i(X, \mathcal{F}) := \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$ finita $\forall i \geq 0$ y $= 0$ para $i \gg 0$ .. (*)
La <u>característica de Euler</u> de $\mathcal{F}$ es

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}).$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ exacta tq (*), entonces $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H})$.

4. Si $f: X \to Y$ morfismo y $\mathcal{F}$ haz quasi coherente en X (i.e., $\forall x \in X$, $\exists \mathcal{U} \ni x$ abierto tq $\exists$ sucesión $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus I} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus J} \to \mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \to 0$). Entonces existe $H^i(Y, f_* \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F})$

Si f inmersión cerrada entonces $H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F})$.

(Idea: Un cubrimiento $\mathcal{U}$ de Y define $f^{-1}(\mathcal{U})$ cubr. de X).

5. Si $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}$ familia de haces en X: $H^i(X, \bigoplus_{j\in J} \mathcal{F}_j) \cong \bigoplus_{j \in J} H^i(X, \mathcal{F}_j)$.

6. :

Teorema (Anulación de Grothendieck): X esp. top. noetherianos, $\dim X = n$ y $\mathcal{F}$ haz en grupos abelianos $\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > n$.

(cf. Ravi Vakil "Alg. Geom" Thm 18.2.6).

7. Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ var afín $\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > 0$, $\forall \mathcal{F}$ quasi coherente

(Serre: $(\Leftarrow)$ ✓)

Cohomología de $\mathbb{P}^n$: $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \dim_k H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$

Teorema a) $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \binom{n+m}{n}$ si $m \geq 0$, $= 0$ si $m < 0$

b) $h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \binom{-m-1}{-n-m-1}$ si $m \leq -n-1$, $= 0$ sino

c) $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = 0$ si $0 < i < n$.

Dem: Sea $\mathcal{F} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \underset{5}{\Rightarrow} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$

Visto: Si $i = 0$: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = k[x_0, \dots, x_n] =: S$ (anillo graduado). $\Rightarrow$ a ✓

Sean $U_0 = \{x_0 \neq 0\}, \dots, U_n = \{x_n \neq 0\}$ abiertos afines.

Para $I \subseteq \{0, \dots, n\}$ escribimos $U_I = \bigcap_{i\in I} U_i$

$\Rightarrow H^0(U_I, \mathcal{F}|_{U_I}) \simeq \mathrm{Vect}_k \langle$ Monomios de Laurent $x_0^{l_0} \cdots x_n^{l_n}$, $l_j \in \mathbb{Z}$ tq $l_j \geq 0$ si $j \notin I \rangle$
(localización)

Complejo de Čech:

$C^\circ(\mathcal{U}, \mathcal{F}): 0 \to \prod S_{x_{i_0}} \to \prod S_{x_{i_0} x_{i_1}} \to \dots \to S_{x_0 \cdots x_n}$

Ejemplo ($n=1$):

$0 \to k[x_0, x_1, x_0^{-1}] \times k[x_0, x_1, x_1^{-1}] \xrightarrow{d^0} k[x_0, x_1, x_0^{-1}, x_1^{-1}] \xrightarrow{d^1} 0$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = \ker(d^1)/\mathrm{Im}(d^0) = k[x_0, x_1, x_0^{-1}, x_1^{-1}]/\mathrm{Im}(d^0)$

$\simeq x_0^{-1} x_1^{-1} k[x_0^{-1}, x_1^{-1}] = \mathrm{Vect}_k \langle x_0^{l_0} x_1^{l_1}$ tq $l_j < 0 \rangle$

(graduación: $l_0 + l_1$).

Para (b) probaremos que $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \simeq k$ y que existe un "emparejamiento perfecto"

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-n-1)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \simeq k$$

($\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = h^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-n-1)) \Rightarrow$ (b) ✓)

Similar al ejercicio:

$$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = \operatorname{coker}\left(\prod_k S_{x_0\cdots\hat{x}_k\cdots x_n} \to S_{x_0\cdots x_n}\right)$$

$$\simeq \mathrm{Vect}_k\langle x_0^{l_0}\cdots x_n^{l_n} \text{ tq } l_j<0\rangle \quad \text{graduado por } \sum l_j = m$$

Si $m=-n-1$ sólo hay un monomio: $x_0^{-1}\cdots x_n^{-1} \Rightarrow h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) = 1$.

Emparejamiento: si $m\geq 0$: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \simeq \mathrm{Vect}_k\langle x_0^{m_0}\cdots x_n^{m_n}$ tq $m_j\geq 0$ y $\sum m_j = m\rangle$

Si $x_0^{l_0}\cdots x_n^{l_n}\in H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-n-1))$ y $x_0^{m_0}\cdots x_n^{m_n} \in H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$

$\Rightarrow x_0^{m_0+l_0}\cdots x_n^{m_n+l_n} \in H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \simeq k$

Si $m<0 \Rightarrow h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-n-1))=0$ pues no hay monomios en $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})$ de grado $-m-n-1 > -n-1$.

Para (c) usamos inducción en n: OK si $n=1$ ✓

Localizar respecto a x_n: $C^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{F})_{x_n} = C^\cdot(\mathfrak{U}|_{U_n}, \mathcal{F}|_{U_n})$

Teo de Serre: $\xRightarrow[U_n \text{ afín}]{(7)} H^i(U_n, \mathcal{F}|_{U_n}) = 0$ si $i>0$

"Localizar" es functor exacto $\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F})_{x_n} = 0$ si $i>0$

ie, todo elemento de $H^i(X,\mathcal{F})$ es anulado por una potencia de x_n.

Probaremos que multiplicar por x_n es inyectivo ($\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F})=0 \Rightarrow$ (c) ✓)

Obs: $0\to S(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} S \to S/\langle x_n\rangle \to 0$ induce

(*) $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_H \to 0$ con $H = \{x_n=0\}\simeq \mathbb{P}^{n-1}$

(*) $\otimes\, \mathcal{F}$: $0\to \mathcal{F}(-1)\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}_H\to 0$ con $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_H(m)$.

Cohomología: $\cdots \to H^i(\mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot x_n} H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(H,\mathcal{F}_H)\to\cdots$

Inducción: $H^i(H,\mathcal{F}_H)=0$ si $0<i<n-1$.

Obs: $0\to H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(-1)) = S \xrightarrow{\cdot x_n} H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})=S \to H^0(H,\mathcal{F}_H) = S/\langle x_n\rangle \to 0$

exacta. $\Rightarrow 0\to H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(-1)) \xrightarrow[\sim]{\cdot x_n} H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})\to H^1(H,\mathcal{F}_H)=0$ exacta ✓

Además:

$$\cdots \to \underbrace{H^{n-2}(H,\mathcal{F}_H)}_{=0 \text{ (inducción)}} \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot x_n} H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to H^{n-1}(H,\mathcal{F}_H)$$

$$\xrightarrow{\Delta} H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot x_n} H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to \underbrace{H^n(H,\mathcal{F}_H)}_{=0 \text{ pues } n>n-1=\dim H}.$$

Se calcula que Δ inyectivo usando ⓑ $\boxed{\text{Ejercicio}}$

$\Rightarrow 0 \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(-1)) \underset{\sim}{\xrightarrow{\cdot x_n}} H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0$ ■

Corolario: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ var proyectiva y $\mathcal{F}$ haz coherente en X (e.g. fibrado vectorial)
$\Rightarrow \dim_k H^i(X,\mathcal{F})$ es finita.

Más resultados importantes (sin demostración):

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva y sea $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$

Si $\mathcal{F}$ haz coherente en X y $m \in \mathbb{Z}$, escribimos $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m)$.

Teorema (Anulación de Serre): Para $m \gg 0$ se tiene
$$H^i(X,\mathcal{F}(m)) = 0 \quad \forall i>0.$$

$\Rightarrow$ La función $P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(\mathcal{F}(m)) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i h^i(X,\mathcal{F}(m))$
es un polinomio, llamado polinomio de Hilbert de $\mathcal{F}$ respecto a $\mathcal{O}_X(1)$.

Recuerdo (haz canónico): Sea X var proyectiva suave de $\dim X = n$.
Definimos el haz canónico por $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$ (fibrado en recta)
Un divisor de Weil K_X es un divisor canónico si $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$.

Ejemplo (Euler): $0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus n+1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus n+1})}_{\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)} \cong \underbrace{\det(\Omega^1_{\mathbb{P}^n})}_{\omega_{\mathbb{P}^n}} \otimes \underbrace{\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})}_{\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}$$

$\Rightarrow \omega_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ y $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)\underbrace{H}_{\text{hiperplano}}$ es un divisor canónico.

Obs: $0 \to \underbrace{E}_{(a_{ij})} \to \underbrace{F}_{(g_{ij})} \to \underbrace{Q}_{(c_{ij})} \to 0$ fibrados vect. $\quad g_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & * \\ \hline 0 & c_{ij} \end{array}\right)$

$\Rightarrow \det(g_{ij}) = \det(a_{ij}) \cdot \det(c_{ij}) \Rightarrow \det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q)$

El punto (b) en el teorema sobre la cohomología de $\mathbb{P}^n$ se generaliza:

Teorema (dualidad de Serre): Sea X var proy lisa de $\dim X = n$. Entonces:

i) $H^n(X, \omega_X) \cong k$

ii) Existe un emparejamiento perfecto
$$H^i(X,E) \times H^{n-i}(X, E^* \otimes \omega_X) \to H^n(X, \omega_X) \cong k$$
donde E es un fibrado vectorial sobre X.

Ejemplo: Si $\dim X = 1$ (curva) y $E \to X$ fibrado vectorial
$\Rightarrow H^1(X,E) \cong H^0(X, E^* \otimes \omega_X)$.

Teorema (fórmula de adjunción): Sea X var proy lisa y $Y \subseteq X$ hipersuperficie suave con $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(Y)$ fibrado en recta asociado. Entonces:
$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes \mathcal{L})|_Y$$

Ejemplo: $X = \mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, y $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie de grado d.
$\Rightarrow \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y luego $\omega_Y \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))|_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-n-1)$

Si $n=2$ (Y curva de grado d): $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-3)$.

$d=1$ (recta): $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(-2)$ (cf. $\omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$)

$d=2$ (cónica): $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(-1)$

$d=3$ ("curva elíptica"): $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y$.