Geometría algebraica (Semana 11): "Cohomología de haces" (Čech)

Idea: Definir $H^n(X,\mathcal{F})$ con X esp. top y $\mathcal{F}$ haz.

Recuerdo: Si X esp. top. Un pre-haz $\mathcal{F}$ en X es un grupo $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ para cada $\mathcal{U}\subseteq X$ abierto tq $\exists\, r^{\mathcal{U}}_{V}:\mathcal{F}(\mathcal{U})\to\mathcal{F}(V)$ para $V\subseteq\mathcal{U}$. verificando

$\mathcal{F}(\phi)=0$, $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}=id$, si $W\subseteq V\subseteq\mathcal{U}$: $r^{\mathcal{U}}_{V}\circ r^{V}_{W}=r^{\mathcal{U}}_{W}$.

$\mathcal{F}$ es un haz si $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X.

$s_i\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ secciones tq $s_i|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}=s_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$ $\forall i,j\in I$

$\Rightarrow \exists!\, s\in\mathcal{F}(X)$ tq $s|_{\mathcal{U}_i}=s_i$. $\forall i$.

Def: Sea $\mathcal{F}$ un haz en X esp. top. Sea $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubr. abierto de X y sea $n\in\mathbb{N}$. Para una colección de índices $(i_0,\dots,i_n)\in I^{n+1}$ denotamos

$\mathcal{U}_{i_0\cdots i_n}:=\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_n}$

Una Čech n-cocadena (o n-cocadena) de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$ es una colección

$\{s_{i_0\cdots i_n}\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0\cdots i_n})\}$ (Una sección para cada $(i_0,\dots,i_n)$)

Ejemplo: 0-cocadena $\{s_i\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)\}_{i\in I}$

1-cocadena $\{s_{ij}\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)\}_{i,j\in I}$

El espacio de n-cocadenas de $\mathcal{F}$ sobre el cubrimiento $\mathcal{U}$ es

$$C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}):=\prod_{(i_0,\dots,i_n)}\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0\cdots i_n})$$

Obs: $f\in C^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ puede ser pensada como una función

$$f: I^{n+1}\longrightarrow \bigcup\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0\cdots i_n})$$
$$(i_0,\dots,i_n)\longmapsto f_{i_0\cdots i_n}\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0\cdots i_n})$$

Una 1-cocadena es una colección de secciones de $\mathcal{F}$

$$\{f_{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)\} =: (f_{ij})$$

<u>Complejo de cocadenas de Čech</u>

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} C^3(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^3} \cdots$$

donde $C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ dada por

$$(f_{i_0\cdots i_n}) \longmapsto \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k\, r(f_{i_0\cdots \underbrace{\hat{i}_k}_{\text{omitir este índice}} \cdots i_{n+1}}) =: (g_{i_0\cdots i_{n+1}})$$

<u>Obs</u>: $\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0\cdots \hat{i}_k \cdots i_n}) \xrightarrow{r} \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0\cdots i_n})$ pues $\mathcal{U}_{i_0\cdots i_n} \subseteq \mathcal{U}_{i_0\cdots \hat{i}_k \cdots i_n}$

<u>Ej</u>: $(f_i) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$; $f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$

$d^0((f_i)) = (g_{ij})$ donde $g_{ij} = f_j - f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$

Aquí: $g : I^2 \to \bigcup \mathcal{F}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$

$\qquad (a,b) \longmapsto f_b - f_a$

$d^1((f_{ij})) = (g_{ijk})$ donde $g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}$

<u>Tarea</u>: $d^{n+1} \circ d^n = 0$.

<u>Def</u>: $\operatorname{Ker}(d^n) = Z^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ n-cociclos

$\operatorname{Im}(d^{n-1}) = B^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ n-cobordes

Por la tarea: $B^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subseteq Z^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$

$$\boxed{H^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) := Z^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) / B^n(\mathcal{U},\mathcal{F})}$$

Queremos definir $H^n(X,\mathcal{F})$ indep. del cubrimiento.

<u>Lema</u>: $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$.

<u>Idea</u>: $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \underset{\substack{\uparrow \\ B^0(\mathcal{U},\mathcal{F})}}{=} Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Consideramos $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha} C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$

$f \longmapsto (f_i)$ con $f_i = f|_{\mathcal{U}_i}$

$\alpha(f) = 0 \iff f_i = 0 \ \forall i\in I \underset{\mathcal{F} \text{ haz}}{\implies} f = 0$.

Observar que si $f\in\mathcal{F}(X)$ y $\alpha(f) = (f_i)$

$d^0((f_i)) = f_j - f_i = f|_{\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_i} - f|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} = 0$

$\Rightarrow \alpha(f) \in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$

α sobreyectiva pues $\mathcal{F}$ haz: $f_i|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} = f_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} \rightsquigarrow \exists f$ ✓ ■

<u>Def</u>: Sean $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}$, $\mathcal{V} = \{V_i\}$ cubrimientos abiertos de X.
Decimos que $\mathcal{V}$ es un <u>refinamiento</u> de $\mathcal{U}$ y escribimos $\mathcal{V} < \mathcal{U}$,
si $\forall V_j \in \mathcal{V}$, $\exists\, \mathcal{U}_i \in \mathcal{U}$ tq $V_j \subseteq \mathcal{U}_i$

(ie, $\exists$ restricción $r: J \longrightarrow I$, $j \longmapsto r(j)$ con $V_j \subseteq \mathcal{U}_{i=r(j)}$)

Existe una función $\hat{r}: C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$

$(f_{i_0\cdots i_n}) \longmapsto (f_{r(i_0)\cdots r(i_n)})$

<u>Además (Tarea)</u>: $(f_{i_0\cdots i_n}) \in Z^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \Rightarrow (f_{r(i_0)\cdots r(i_n)}) \in Z^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$

" $\in B^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \Rightarrow$ " $\in B^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$

Luego, r induce

$$H(r): H^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

Lema: $H(r)$ no depende de r

Escribimos $H(r)$ como $H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ (sólo depende de los cubrimientos).

Obs: Si $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ 3 cubrimientos, entonces

$$H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} \circ H^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}$$

Lema: $H^{\mathcal{U}}_{V} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ es inyectiva

Dem: Sea $(f_{ab}) \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tq $H^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}((f_{ab})) = 0$

ie $(f_{r(a)r(b)}) \in B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. (cierta $r : J \to I$)

Queremos: $(f_{ab}) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Como $(f_{r(a)r(b)}) \in B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, $\exists (g_c) \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$

tq $d((g_c)) = (f_{r(a)r(b)})$

Por def: $g_b - g_a = f_{r(a)r(b)}$ $\forall a, b \in J$

Fijemos $c \in J$:

$$d^1(d(g_c)) = d^1(f_{r(a)r(b)}) = 0$$

$$\shortparallel$$

$$f_{r(a)r(b)} - f_{c\,r(b)} + f_{c\,r(a)} = 0$$

$$\Rightarrow g_b - g_a = f_{r(a)r(b)} = f_{c\,r(b)} - f_{c\,r(a)} \quad \text{en } V_a \cap V_b \cap V_c$$

$\forall a, b$: $g_b - f_{c\,r(b)} = g_a - f_{c\,r(a)}$ en $V_a \cap V_b \cap V_c$.

Notemos que $\{V_a \cap V_c\}_{a \in J}$ cubrimiento de V_c

$\Rightarrow \exists!\ h_c$ tal que $h_c = g_a - f_{c\,r(a)}$ en $V_a \cap V_c$.

P.d. $d^0((h_c)) = (f_{ab}) \iff h_b - h_a = f_{ab}$

Sea $c \in J$:

$$f_{ab} = f_{a\,r(c)} - f_{b\,r(c)} = f_{a\,r(c)} - g_c - f_{b\,r(c)} + g_c$$

$$= -(g_c - f_{a\,r(c)}) + (g_c - f_{b\,r(c)}) = h_b - h_a$$

Se cumple $\forall c \in J \xRightarrow[\mathcal{F} \text{ haz}]{} f_{ab} = h_b - h_a \ \forall a, b$ ∎

<u>Def</u>: Sea $\mathcal{F}$ un haz en X y $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$H^n(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{\substack{\mathcal{U} \text{ cubr.} \\ \text{de } X}} H^n(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Sea $\phi : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ morfismo de haces sobreyectivo, ie, $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ abierto $\phi(\mathcal{U}) : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ morfismo sobreyectivo

Podemos definir $\mathcal{K} = \ker(\phi)$ def por $\mathcal{K}(\mathcal{U}) := \ker(\phi(\mathcal{U}))$ haz.

Existe un <u>morfismo de conexión</u>:

$$\Delta : \underset{\mathcal{G}(X)}{\overset{}{\underset{\wr\wr}{H^0(X,\mathcal{G})}}} \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}) = Z^1/B^1$$

Sea $g \in H^0(X,\mathcal{G})$ (ϕ es sobre): $\forall p \in X$, $\exists\, \mathcal{U}_p \ni p$ tq $\phi(f_p) = g|_{\mathcal{U}_p}$ para algún $f_p \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_p)$.

Si $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento de X

definimos $h_{pq} = f_q - f_p \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q)$

$\Rightarrow (h_{pq})$ es 1-cociclo y además

$$\phi(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q) : \mathcal{F}(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q) \to \mathcal{G}(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q)$$

$$h_{pq} = f_p - \cancel{f_q} \mapsto g|_{\mathcal{U}_p\cap\mathcal{U}_q} - g|_{\mathcal{U}_q\cap\mathcal{U}_p} = 0$$

$\Rightarrow \Delta(g) = (h_{pq})$ ∎

<u>En resumen</u>: Si $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ exacta (de haces) entonces:

$$0 \to H^0(X,\mathcal{K}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G})$$

$$\xrightarrow{\Delta} H^1(X,\mathcal{K}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G})$$

$$\to \cdots$$ (sucesión exacta larga en cohomología).