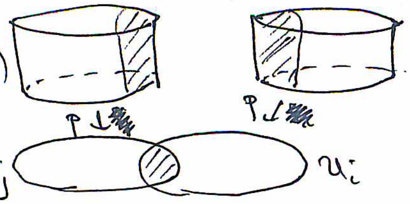
Geometría algebraica (Semana 10): "Haces localmente libres, fibrados en recta y divisores"

Recuerdo: Un fibrado en recta $p : L \to X$ está determinado por funciones de transición

$$U_j \times \mathbb{A}^1 \underset{f_j}{\overset{\sim}{\leftarrow}} p^{-1}(U_j) \qquad\qquad p^{-1}(U_i) \underset{f_i}{\overset{\sim}{\rightarrow}} U_i \times \mathbb{A}^1$$



Para $(x,t) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \longmapsto (x, \underbrace{g_{ij}(x)}_{\in k^\times} t) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1$ vía $(f_i f_j^{-1})|_{U_i \cap U_j}$

Una sección de $p : L \to X$ es un morfismo $s : X \to L$ tq $s(x) \in L_x$ $\forall x \in X$.
$H^0(X,L)$ k-espacio vectorial de secciones (globales).

Hecho: Si X es proyectivo entonces $\dim_k H^0(X,L) =: h^0(X,L)$ es finita.

Ejemplo: Vimos que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ está dado por

$$\{([l], x) \in \mathbb{P}(V) \times V \text{ tq } x \in l\} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$$
$$([l], x) \longmapsto [l]$$

Con trivialización sobre $U_i = \{x_i \neq 0\}$ dada por

$$U_i \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow[\sim]{f_i^{-1}} p^{-1}(U_i)$$
$$\Big(\underbrace{\Big[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\Big]}_{\text{generador de "}l\text{"}}, t\Big) \longmapsto \Big([x_0, \dots, x_n], \underbrace{\Big(\frac{t x_0}{x_i}, \dots, t, \dots, \frac{t x_n}{x_i}\Big)}_{\text{"}l\text{"}}\Big)$$

Funciones de transición:
$$f_j^{-1}(x,t) = \Big(x, \Big(\frac{t x_0}{x_j}, \dots, \frac{t x_n}{x_j}\Big)\Big)$$
$$f_i^{-1}(x,t) = \Big(x, \Big(\frac{t x_0}{x_i}, \dots, \frac{t x_n}{x_i}\Big)\Big) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t x_k}{x_j} = g_{ij}(x) \frac{t x_k}{x_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j}}$$

Grupo de Picard: Definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{-1}$ usando $g_{ij} = \frac{x_j}{x_i}$

En gral, si $k \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ usando $\boxed{g_{ij} = \Big(\frac{x_j}{x_i}\Big)^k}$

Secciones globales: Sup. que $k \geq 0$.

Vimos: Una sección está dada por $\{s_i\}_{i \in I}$, $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tq $s_i = g_{ij} s_j$

si $\underset{\mathbb{A}^n}{\overset{}{U_i}} = \{x_i \neq 0\}$ y $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ $\Rightarrow$ $s_i = \frac{P_i}{x_i^{m_i}}$, P_i homogéneo de grado m_i

$U_i \cong \mathbb{A}^n$ con coord $\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$

Luego, $s_i = g_{ij} s_j \iff \dfrac{P_i}{x_i^{m_i}} = \dfrac{x_j^k}{x_i^k} \cdot \dfrac{P_j}{x_j^{m_j}} \; \forall i,j \iff \underbrace{P_i \, x_i^{k-m_i} = P_j \, x_j^{k-m}}_{\text{define } P \text{ polinomio homogéneo de grado } k}$

$\Rightarrow s_i = \dfrac{P}{x_i^k}$

Finalmente, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \xrightarrow{\simeq} A_k = k[x_0, \dots, x_n]_k = \{\text{pol. homog de grado } k\}$

$\left\{ s_i = \dfrac{P}{x_i^k} \right\}_{i=0,\dots,n} \longmapsto P$

Similar: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \{0\}$ si $k<0$.

$$\Rightarrow h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{k+n}{n} & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

<u>Sistemas lineales</u>: Sea $p: L \to X$ fibrado en recta en X.

<u>Def</u>: Un <u>sistema lineal</u> M en X es un subesp. vectorial $M \subseteq H^0(X,L)$ de dimensión finita. Diremos que M es <u>completo</u> si $M = H^0(X,L)$.

Dado un sistema lineal M podemos definir una aplicación racional

$$\varphi_M : X \dashrightarrow |M| := \mathbb{P}(M^\vee) \quad (\text{esp. proyectivo dual, puntos son } \underline{\text{hiperplanos}})$$
$$x \longmapsto \{ s \in M \mid s(x) = 0_{L_x} \} =: M_x$$

<u>Obs</u>: φ_M definida en $x \in X \iff \exists s \in M$ tq $s(x) \neq 0$.

<u>Def</u>: Diremos que M es <u>sin puntos de base</u> si $\forall x \in X$, $\exists s \in M$ tq $s(x) \neq 0$ ($\iff \varphi_M$ es un morfismo).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ si $M \subseteq H^0(X,L)$ sin puntos de base $\iff L = \varphi_M^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(M^\vee)}(1)$.

Luego: $\left\{ \begin{matrix} \text{morfismos} \\ X \to \mathbb{P}^n \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{Fibrado en recta } L \to X \\ \text{con un sistema lineal } M \subseteq H^0(X,L) \\ \text{de dim } n+1 \text{ y sin pts de base} \end{matrix} \right\}$.

En coordenadas: Sea $\{s_0, \dots, s_m\}$ base de M y sea $s = \sum_{i=0}^m \lambda_i s_i$.

$\Rightarrow s(x) = 0$ ssi $\underbrace{\sum \lambda_i s_i(x) = 0}_{\text{ec. del hiperplano } M_x}$

Luego, $\varphi_M : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m \simeq |M|$

$x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_m(x)]$ en coordenadas.

<u>Ejemplo</u>: $X = \mathbb{P}^2$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$, $M = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) = A_2$

$\Rightarrow \varphi_M = \nu_2 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ - inmersión de Veronese.

$[x,y,z] \mapsto [x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz]$

¿ Cuándo $\varphi_M : X \hookrightarrow \mathbb{P}(M^\vee)$ inmersión? Necesitamos:

⓪ φ_M morfismo $\iff$ M sin puntos de base

① φ_M inyectivo: $\forall x, x' \in X$, $x \neq x'$, $\exists s \in M$ tq $s(x) \neq 0 = s(x')$ ("anularse en x y x'" son condiciones diferentes")

Diremos que M separa puntos. ($\Rightarrow \varphi_M$ morfismo finito)

② El diferencial de φ_M es inyectivo $\forall x \in X$. Diremos que M separa tangentes:

Sea $x_0 \in X$ y sea $\{s_0, \dots, s_m\}$ base de M tq $s_0(x) \neq 0$ y $s_i(x_0) = 0$ $\forall i > 0$

$$\Rightarrow \varphi_M(x) = [s_0(x), \dots, s_m(x)] = \left[1, \underset{\mathcal{O}_{X,x_0}}{\underset{\cap}{\frac{s_1(x)}{s_0(x)}}}, \dots, \underset{\mathcal{O}_{X,x_0}}{\underset{\cap}{\frac{s_m(x)}{s_0(x)}}}\right] \in \mathcal{U}_0 = \{s_0 \neq 0\}$$

ie, φ_M dado por $x \mapsto \left(\frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_m(x)}{s_0(x)}\right)$ en una vecindad $\mathcal{U}_0$ de $x_0 \in X$

$$\Rightarrow d_{x_0}\varphi_M : \underset{T_{x_0}X}{\underset{\cap}{v}} \longmapsto \left(\frac{(d_{x_0}s_1)(v)}{s_0(x_0)}, \dots, \frac{(d_{x_0}s_m)(v)}{s_0(x_0)}\right)$$

(si $s_i = g_{ij} s_j \Rightarrow d_x s_i(v) = g_{ij}(x)\, d_x s_j(v) + d_x g_{ij}(v) \underbrace{s_j(x)}_{=0}$ en $x \in X$ tq $s(x) = 0$)

Luego: M separa tangentes $\iff \forall v \in T_xX$, $\exists s \in M$ tq $s(x) = 0$ y $d_x s(v) \neq 0$.

Prop: φ_M inmersión cerrada $\iff$ M separa puntos y tangentes.

Def: Sea $M \subseteq H^0(X, L)$ sist. lineal. Diremos que:

1) M es muy amplio si φ_M es una inmersión cerrada
2) L es muy amplio si $H^0(X, L)$ muy amplio.
3) L es amplio si $\exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes m}$ es muy amplio.
4) L es semiamplio si $\exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes m}$ sin puntos de base.

Teorema (Bertini). Sea $M \subseteq H^0(X, L)$ sist. lineal sin pts de base. Sup que X es suave y $\operatorname{char}(k) = 0$. Entonces, para $s \in M$ genérica $X_s := X \cap \{s = 0\}$ es suave.

§ Divisores:

Def: Un divisor de Weil en una var. alg. irred X es una suma formal $D = \sum_Y n_Y \cdot Y$ de hipersup. irred Y, con $n_Y \in \mathbb{Z}$ y $\{n_Y$ tq $n_Y \neq 0\}$ finito.

Ejemplo principal: X suave, $f \in \operatorname{Rat}(X) \setminus \{0\}$. Construiremos un divisor de Weil $\operatorname{div}(f)$ asociado ("divisor principal"):

si $Y \subseteq X$ hipersup. irred y $y \in Y$ punto liso $\Rightarrow \mathcal{I}_{Y,y} \subseteq \mathcal{O}_{X,y}$ generado por 1 elemento: $\mathcal{I}_{Y,y} = (u)$, u irred.

En $\mathcal{O}_{X,y}$: $f = \dfrac{g}{h} = \dfrac{u^a g'}{u^b h'} = u^{a-b} \dfrac{g'}{h'}$ con $g', h' \notin \mathcal{I}_{Y,y}$

Definimos $\nu_Y(f) := a - b$ (multiplicidad) $\leftarrow$ Indep. de $y \in Y$.

Obs.: $\nu_Y(f) > 0 \iff f$ se anula en Y

· $\nu_Y(f) < 0 \iff f$ tiene un polo en Y.

· $\nu_Y(f) \geq 0 \ \forall Y \subseteq X \iff f \in \mathcal{O}(X)$

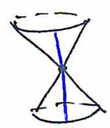
· $\nu_Y(f) \neq 0$ sólo para finitas hipersup. $Y \subseteq X$ (ejercicio)

[Idea: sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto donde f regular y sea $Y \subseteq X$ hipersup.
i) si $Y \subseteq X \setminus \mathcal{U}$: finitas hipersup. ✓
ii) si $Y \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$: sea $z \in \mathcal{U} \cap Y$ punto liso de Y.
$\Rightarrow \nu_Y(f) \geq 0$ y si $\nu_Y(f) > 0 \Rightarrow Y \subseteq V(f)$: finitas hipersup ✓]

Luego, asociamos a $f \in \mathrm{Rat}(X)^*$ el divisor de Weil

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{Y \subseteq X} \nu_Y(f) \cdot Y = \underbrace{\mathrm{div}(f)_+}_{\text{ceros}} - \underbrace{\mathrm{div}(f)_-}_{\text{polos}} \quad (\text{divisor principal})$$

Obs: 1) El análisis anterior funciona si $\mathrm{codim}_X \mathrm{Sing}(X) \geq 2$ (e.g. X normal).
2) $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$

Ejemplo: ① $X = \{xy = z^2\} \subseteq \mathbb{A}^3$ 

$D = \{x = z = 0\}$

. si $x \in \mathcal{O}(X)$ regular

$$\Rightarrow \mathrm{div}(x) = 2\,\{\underbrace{x = z = 0}_{\text{recta}}\} = 2D$$

② si $x_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \Rightarrow \mathrm{div}(x_i) = H_i = \{x_i = 0\}$ hiperplano

$\mathrm{div}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = H_i - H_j$.

Def: Un divisor de Weil $D = \sum_{Y \subseteq X} n_Y \cdot Y$ es efectivo si $n_Y \geq 0 \ \forall Y \subseteq X$. ("$D \geq 0$")

Def: Dos divisores de Weil D_1, D_2 son linealmente equivalentes si $D_1 - D_2$ es principal, ie, $\exists f \in \mathrm{Rat}(X)^*$ tq $D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$

Notación: $D_1 \sim D_2$

Ejemplo: si H_1 y H_2 son hiperplanos en $\mathbb{P}^n \Rightarrow H_1 \sim H_2$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$: si $X_d \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersup. de grado d y $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano $\Rightarrow X_d \sim dH$.

Def: Un divisor de Cartier es una colección finita $\{(\mathcal{U}_i, f_i)\}_{i \in I}$ con $\mathcal{U}_i$ abiertos tq $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ y $f_i \in \mathrm{Rat}(\mathcal{U}_i)^*$ tales que en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ el cociente $g_{ij} = f_i / f_j$ es regular y no se anula.

Obs: si $D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\}$ y $D' = \{(\mathcal{U}_i, f_i')\}$ div de Cartier, definimos:

$-D := \{(\mathcal{U}_i, 1/f_i)\}$ y $D + D' := \{(\mathcal{U}_i, f_i f_i')\}$.

D es efectivo si $f_i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ regulares; D principal si $f_i = f \in \mathrm{Rat}(X)^* \ \forall i$.

Sea $D = (\mathcal{U}_i, f_i)_{i\in I}$ divisor de Cartier. Podemos asociarle ($\mathrm{codim}_X \mathrm{Sing}(X) \geq 2$)

① Divisor de Weil: $\hat{D} = \sum_{Y \subseteq X} m_Y \cdot Y$ donde $m_Y = \nu_Y(f_i)$ y $Y \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$ (bien def!)

Obtenemos un morfismo $\{\text{Div de Cartier}\} \longrightarrow \mathrm{Div}(X) = \{\text{Div de Weil}\}$

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Div de Cartier}\} & \longrightarrow & \mathrm{Div}(X) = \{\text{Div de Weil}\} \\ \cup\!\!\mid & & \cup\!\!\mid \\ \{\text{Div. Cartier principales}\} & \longrightarrow & \{\text{Div. Weil principales}\} \end{array}$$

Inyectivo si: $\nu_Y(f_i) = 0 \ \forall Y \subseteq X \Rightarrow f_i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ regular ($\Leftarrow X$ normal $\Leftarrow X$ suave).

Notación: $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Div}(X) / \{\text{div. principales}\}$. ("grupo de clases").

Ej: $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}H$, pues $X_d \sim dH$
↑ hiperplano

② Fibrado en recta: $\mathcal{O}_X(D)$ definido por las funciones $g_{ij} = f_i / f_j$

③ Una sección racional s_D de $\mathcal{O}_X(D)$:

Una sección racional de $L = \mathcal{O}_X(D)$ es una colección $s_i \in \mathrm{Rat}(\mathcal{U}_i)$ tq $s_i = g_{ij} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.
(ie, $s: X \dashrightarrow L$ racional).

Aquí: $s_i := f_i$ y luego $s_i = g_{ij} s_j$ por definición!

Si $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}$ dada por $s_i = g_{ij} s_j$ y s_D por $f_i = g_{ij} f_j$

$\Rightarrow \dfrac{s_i}{f_i} = \dfrac{s_j}{f_j} \ \forall i,j \Rightarrow f = \dfrac{s}{s_D} : X \dashrightarrow k$ función racional

Luego: $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(s) - \underbrace{\mathrm{div}(s_D)}_{D \text{ (ejercicio)}} \iff \mathrm{div}(s) = D + \mathrm{div}(f)$. $(\Rightarrow D \sim \mathrm{div}(s))$

Recíprocamente: si $D \sim D'$ $\Rightarrow \exists f: X \dashrightarrow k$ racional tq $D' - D = \mathrm{div}(f)$
y $s = f s_D$ sección racional (de $\mathcal{O}_X(D)$) tq $\mathrm{div}(s) = D'$.

Conclusión: $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{ f \in \mathrm{Rat}(X) \text{ tq } f = 0 \text{ o } \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \}$

En part, si X var proyectiva:

$$\mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{ E \geq 0 \text{ efectivo tq } E \sim D \}.$$

Teorema: Hay un isomorfismo $\{\text{Div. de Cartier}\} / \{\text{div. principales}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$

Dem: Sea $\pi : \{\text{Div. de Cartier}\} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$
$D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\} \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ def por $g_{ij} = f_i / f_j$

a) Si D principal $\Rightarrow g_{ij} = 1 = f/f \Rightarrow \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X$ fibrado en recta trivial.

$\Rightarrow \pi : \{\text{Div de Cartier}\} / \{\text{div principales}\} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$

b) π inyectiva: Un fibrado en recta L es trivial $\Leftrightarrow \exists\, s \in H^0(X,L)$ con $s \neq 0$ sin ceros:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (x,t) \arrow[r, mapsto] & \cancel{}\ ts(x) \\ X \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "pr_1"'] & L \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

isomorfismo.

Si $\mathcal{O}_X(D)$ trivial $\exists\, s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ dada por $s_i = \underbrace{g_{ij}}_{f_i/f_j} s_j$, $s_i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$

$\Rightarrow \dfrac{s_i}{f_i} = \dfrac{s_j}{f_j}\ \forall i,j \rightsquigarrow f = \dfrac{s}{s_D}$ función racional

$\Rightarrow \operatorname{div}(f) = \underbrace{\operatorname{div}(s)}_{\substack{=0 \\ (s \text{ no se anula})}} - \underbrace{\operatorname{div}(s_D)}_{D} \Rightarrow D = -\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(1/f)$ principal ✓

c) π sobreyectiva: sea $L \in \operatorname{Pic}(X)$ dado por $g_{ij} \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$

Fijar un índice j_0 y sea $f_i := g_{ij_0} \in \operatorname{Rat}(\mathcal{U}_i)^*$

$\Rightarrow D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\}$ div de Cartier, con $\mathcal{O}_X(D)$ dey por $g'_{ij} = \dfrac{f_i}{f_j} = \dfrac{g_{ij_0}}{g_{jj_0}} \overset{\substack{\text{cond. de} \\ \text{cociclo!}}}{=} g_{ij}$ ■

Hecho: Si X es suave: $\left\{\begin{array}{c}\text{Div de} \\ \text{Cartier}\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{Div. de} \\ \text{Weil}\end{array}\right\}$.

Idea: Si $Y \subseteq X$ hipersup. $\underset{X \text{ suave}}{\Rightarrow} Y$ dada localmente por 1 ecuación.

Si $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ tq $Y \cap \mathcal{U}_i = V(u_i) \Rightarrow D = (\mathcal{U}_i, u_i)_{i \in I}$ div de Cartier con $\hat{D} = Y$. ■

En Resumen: sea X var. irred normal (e.g. X suave):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{O}_X(D) \in \operatorname{Pic}(X) = \{\text{Fibr. en recta}\}/\sim \arrow[r, "\sim"] & \{\text{Haces invertibles}\} \\ & L \longmapsto \mathcal{L}, \text{ con } \mathcal{L}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, L_{\mathcal{U}}) \\ D \in \{\text{Div de Cartier}\}/\{\text{div principal}\} \arrow[u, mapsto] \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, hook, "(*)"'] & Cl(X) = \{\text{Div de Weil}\}/\{\text{div principal}\} \\ \operatorname{Div}(X) := \{\text{Div de Cartier}\} \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook, "(*)"'] & W\operatorname{Div}(X) = \{\text{Div. de Weil}\} \arrow[u, two heads] \\ D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\} \arrow[r, mapsto] & \hat{D} = \sum \nu_Y(f_i) \cdot Y \end{tikzcd}$$

Si X suave $\Rightarrow (*)$ isomorfismo.

Ejemplo: $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong Cl(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$ generado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\underset{\uparrow \text{ hiperplano}}{H})$.