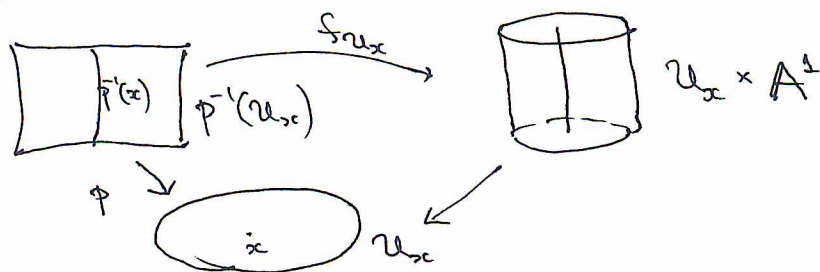


1. Fibrados en recta
2. Funciones de transición
3. Secciones
4. Fibrados vectoriales
5. Fibrado tangente y cotangente.

Def: X var alg. Un fibrado en recta sobre X es una var. alg L con un mapeo regular $p: L \rightarrow X$ tq $p^{-1}(x) \cong \mathbb{A}^1 \forall x \in X$ y además es localmente trivial: $\forall x \in X, \exists U_x \ni x$ vecindad abierta y un isomorfismo

$$f_{U_x}: p^{-1}(U_x) \xrightarrow{\sim} U_x \times \mathbb{A}^1 \quad (\text{"trivialización"})$$



Ejemplos:

① Fibrado en recta trivial: $L = X \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{p} X$
 $(x, t) \mapsto x$

② $X = \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$
 $\uparrow$ k-exp. vectorial de dim $n+1$

$$L = \{ ([\ell], x) \in \mathbb{P}^n \times V \mid x \in \ell \} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$([\ell], x) \longmapsto [\ell]$$

Trivialización: $U_i = \{x_i \neq 0\}$

$\mathbb{P}^n$ con coord $[x_0, \dots, x_n]$

$\mathbb{A}^1$ con coord t .

$$U_i \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow p^{-1}(U_i)$$

$$\left(\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right], t \right) \mapsto \left([x_0, \dots, x_n], \left[t \frac{x_0}{x_i}, \dots, t, \dots, t \frac{x_n}{x_i} \right] \right)$$

Notación: Fibrado en recta tangencial, $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$

3) Restricción a subvariedades

$$L \xrightarrow{p} X, \quad Y \subseteq X \Rightarrow L|_Y := p^{-1}(Y) \text{ fibrado en recta}$$

4) Pullback de fibrados en recta:

$$p: L \rightarrow X, \quad f: Y \rightarrow X \text{ morfismo}$$

$$\Rightarrow f^*L := \{(y, l) \in Y \times L \mid f(y) = p(l)\} \text{ fibrado en recta en } Y.$$

$$\text{Obs: } (f^*L)_y \cong L_{f(y)}.$$

Def: Un morfismo de fibrados en recta $p: L \rightarrow X$, $q: M \rightarrow X$ es un mapeo regular $f: L \rightarrow M$ tq

$$1) q \circ f = p$$

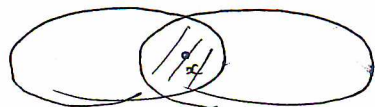
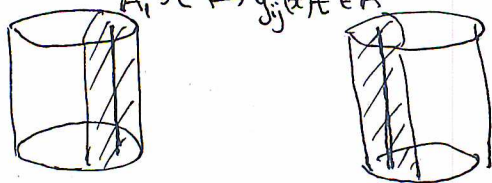
$$2) \forall x \in X, \quad f_x: L_x \cong \mathbb{A}^1 \rightarrow M_x \cong \mathbb{A}^1 \text{ mapeo lineal.}$$

§2. Funciones de transición:

Considera $p: L \rightarrow X$ un fibrado en recta y $\{U_i\}$ cubrimiento de X tq $L|_{U_i} = p^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{A}^1$.

Sobre $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos:

$$\begin{array}{ccc} & p^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ \swarrow f_j|_{U_i \cap U_j} & & \searrow f_i|_{U_i \cap U_j} \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 & & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \\ (x, t) & \xrightarrow{\quad} & (x, g_{ij}(x)t) \\ & A_1 t \mapsto g_{ij}(x)t \in A_1 & \end{array}$$



Los g_{ij} cumplen la condición de cociclo $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$

Def: El grupo de Picard es

$$\text{Pic}(X) = \{ \text{fibrados en recta sobre } X \} / \sim$$

Es un grupo abeliano

Producto: $L \otimes M$ definidos por las funciones de transición $\{g_{ij} \cdot h_{ij}\}$ con L dy por $\{g_{ij}\}$ y M dy por $\{h_{ij}\}$

Identidad: $L = X \times \mathbb{A}^1$, con $\{g_{ij} = 1\}$

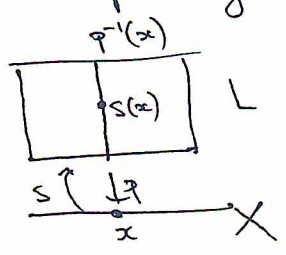
Inverso: $L \ni L$ dy por $\{g_{ij}\} \Rightarrow L^{-1}$ dy por $\{1/g_{ij}\}$

§3. Secciones:

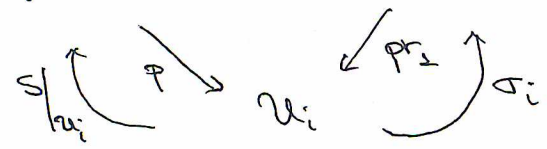
Def: Una sección de un fibrado en recta $\phi: L \rightarrow X$ es un mapeo regular

$$s: X \rightarrow L \quad \text{t.q.} \quad \phi \circ s = \text{Id}_X$$

Notación: $H^0(X, L) = \{s: X \rightarrow L \text{ sección}\}$



Obs: $L|_{\phi^{-1}(U_i)} \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{A}^1$ trivialización



$$\Rightarrow \sigma_i(x) = (x, s_i(x)) \text{ con } s_i \in \mathcal{O}(U_i)$$

Además, sobre $U_i \cap U_j$ tenemos:

$$(x, s_j(x)) \xleftarrow{f_j} s(x) \xrightarrow{f_i} (x, s_i(x))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_{ij}}$

$$\Rightarrow \boxed{s_i = g_{ij} s_j}$$

Ejemplo ① $L = X \times \mathbb{A}^1$ trivial $\Rightarrow H^0(X, L) = \mathcal{O}(X)$.

② $L \ni s \in H^0(X, L)$ y $t \in H^0(X, M)$ con $s_i = g_{ij} s_j$
 $t_i = h_{ij} t_j$

$\Rightarrow s \otimes t \in H^0(X, L \otimes M)$ definida por $s_i t_i = g_{ij} h_{ij} s_j t_j$

Def: Considerar un fibrado en recta $L \xrightarrow{p} X$. Se define el haz $\mathcal{L}$ sobre X por $\mathcal{L}(U) := \bigoplus_{U \rightarrow V} H^0(V, L|_V)$, $\forall U \subseteq X$ abierto.

Obs: Si L es trivial sobre U
 $\Rightarrow \mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$.

Def: 1. Diremos que un haz $\mathcal{F}$ es invertible si es localmente isomorfo al haz estructural $\mathcal{O}_X$.
2. Un haz invertible es un haz coherente (más adelante) sobre el espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ para el que existe una inversa resp. al producto tensorial de $\mathcal{O}_X$ -módulos.

Hecho: $\left\{ \begin{array}{c} \text{haces} \\ \text{invertibles} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{fibrados} \\ \text{en recta} \end{array} \right\}$
 $\mathcal{L} \longleftarrow L$

Recíprocamente: si $\mathcal{L}$ haz invertible, elegir $\{U_i\}$ cubrimiento de X tq

$\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$
 $\Rightarrow \mathcal{O}_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{f_i^{-1}} \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{f_i} \mathcal{O}_{U_i}$

$\xrightarrow{\quad \quad \quad} \quad \quad \quad$
 f_{ij} función de transición $\leadsto$ Determina $p: L \rightarrow X$.

§4. Fibrados vectoriales:

Def: Un fibrado vectorial de rango r sobre X es una var. dg E con un mapeo regular $p: E \rightarrow X$ tq $p^{-1}(x) \cong \mathbb{A}^r \forall x \in X$ y además localmente trivial:

$p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{f_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{A}^r$
 $\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}^r & \\ p \swarrow & & \searrow p \circ f_\alpha \\ & U_\alpha & \end{array}$

Sobre $U_i \cap U_j$

$$(U_i \cap U_j) \times A^r \xrightarrow{f_i f_j^{-1}} (U_i \cap U_j) \times A^r$$

$$(x, v) \longmapsto (x, g_{ij}(x) v)$$

Obs: Las $g_{ij}(x) \in GL_r(k)$ son matrices de transición. Verifícan la condición de cociclo.

Ejemplos:

$$X = Gr(k, V)$$

$$E = \{ (W, x) \in X \times V \mid x \in W \} \xrightarrow{pr_2} X$$

$$p^{-1}(W) \cong W \cong A^k$$

Algebra lineal:

Sean $E \rightarrow X$, rango r , $\{g_{ij}\}$ matrices de trans.
 $F \rightarrow X$, rango s , $\{h_{ij}\}$ " "

1) Suma directa: $E \oplus F$, rango $r+s$, $\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}$

2) Producto tensorial: $E \otimes F$, rango rs , $g_{ij} \otimes h_{ij}$

3) Dual E^* , rango r , $g_{ij}^* = {}^t g_{ij}^{-1}$

4) $\det(E)$, rango 1, $\det(g_{ij})$ (¡fibrado en recta!)

Todas las dg. anteriores se extienden: secciones, haz $\mathcal{E}(U) = H^0(U, E|_U)$, etc

§5. Fibrado tangente:

Sea X var alg suave, irreducible, $\dim X = n$

Escogemos un cubrimiento $\{U_i\}$ de X . $\forall$ existen coord locales $\forall U_i$:

$u_1^i, \dots, u_n^i$, i.e., $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ generan $T_x^* X$ en $x \in U_i$

Sobre $U_i \cap U_j$ tendremos: $du^i = g_{ij} du^j$ con $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(k)$
 "jacobianos"

$$T^*X = \bigcup_{x \in X} T_x^* X = \Omega^1 X \quad \text{fibrado cotangente}$$

(1-formas)

$$TX = (T^*X)^* = (\Omega^1 X)^* \quad \text{fibrado tangente}$$

$$\omega_x = \det(\Omega_x^1) \quad \text{fibrado en recta canónica}$$

Ejemplos:

1. $TA^n \cong A^n \times A^n$ fibrado trivial.
 $\frac{\partial}{\partial x_i} \leftrightarrow (x, e_i)$

2. $X = \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, $V \cong k^{n+1}$

$\text{Pic}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$

Se prueba que existe una sucesión exacta (de Euler)

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \rightarrow T_{\mathbb{P}(V)} \rightarrow 0$$

$\downarrow$
 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$
 $\uparrow$
 trivial

$\downarrow$
 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1}$