Geometría algebraica (Semana 8): "Superficies de Del Pezzo y threefold cúbicos" ①

) Superficies

.) Superficies de Del Pezzo (1887)

.) Hipersuperficies cúbicas lisa en $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ "cubic threefold"

Históricamente:

) $\left(\underbrace{\frac{1-t^2}{1+t^2}}_{x(t)}, \underbrace{\frac{-2t}{1+t^2}}_{y(t)}\right)$ parametrización de la circunferencia $x^2+y^2=1$.

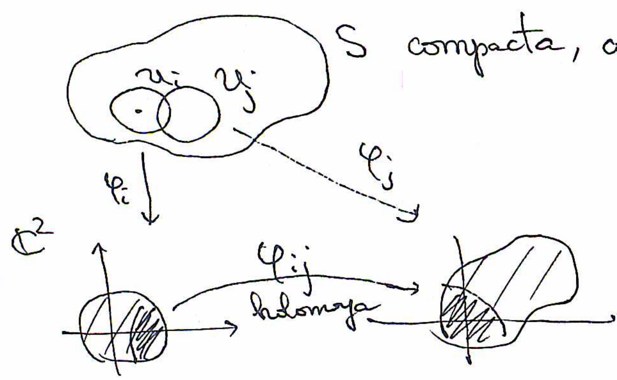
) Si consideramos una cúbica lisa en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ (ver Shafarevich): No es racional

Cúbica lisa en $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, es una superficie racional. (resultado clásico)

) Cúbica lisa en $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ no es racional (Clemens - Griffiths)

1) Superficies:



S compacta, conexa

Nos gustaría $S \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

~

haces, haz "canónico"

"divisores" (subvar. de codim 1)

fibrados en línea (próxima semana)

$\mathrm{Rat}(S) \longleftrightarrow \mathcal{M}(S)$ funciones meromorfas

Si $f \in \mathcal{M}(S)$ tq si $p \neq q \Rightarrow f(p) \neq f(q)$

y tq $\forall x \in S$, $\exists\, f, g \in \mathcal{M}(S)$ tales que (f,g) coord. holomorfas locales en x

$\rightsquigarrow$ Producimos una inmersión cerrada $\varphi : S \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

1) Topología de S
2) Teoría de Hodge (cohomología)
3) Sucesión exacta de cohomología

Como $\dim_{\mathbb{C}} S = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} S = 4$.

Grupos de homología: $H_0(S,\mathbb{Z})$, $H_1(S,\mathbb{Z})$, $H_2(S,\mathbb{Z})$, $H_3(S,\mathbb{Z})$, $H_4(S,\mathbb{Z})$

Rangos: b_0, b_1, b_2, b_3, b_4

↳ "números de Betti"

$$\chi_{top}(S) := \sum_{i=0}^{4} (-1)^i b_i$$

E.g. $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\} \Rightarrow \underbrace{b_1 = b_3 = 0}_{\text{no hay celdas reales de dim impar}}$, $b_0 = 1$ (conexo)

<u>Dualidad de Poincaré</u>:

$$\langle\,,\rangle : H_{n-k}(X) \times H_k(X) \longrightarrow H_n(X) \cong \mathbb{Z} \quad (\text{pues } X \text{ compacta})$$

forma bilineal simétrica y unimodular.

$b_0 = b_4$, $b_1 = b_3$

(E.g. $b_4(\mathbb{P}^2) = 1$).

<u>Obs</u>: (más adelante): La clase canónica de $\mathbb{P}^n$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-(n+1))$

<u>Idea</u>: En $\mathbb{P}^1$ $\quad \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$

$$z \longmapsto w = \frac{1}{z}$$

$$d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-1}{z^2} dz \qquad \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

↑ Polo de orden 2 en infinito $\rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$

Se calcula $b_2 = 1 \Rightarrow \chi_{top}(\mathbb{P}^2) = 3$.

Miraremos $\mathbb{P}^2$; sup. abelianas (ver las notas): $T \cong \mathbb{C}^2/L$ con $L \cong \mathbb{Z}^4$

↑ toro complejo 2-dimensional

$b_0(T) = b_4(T) = 1$, $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z}^4 \Rightarrow b_1(T) = b_3(T) = 4$, $H_2(T) \cong \Lambda^2 \mathbb{Z}^4 \simeq \mathbb{Z}^6$

$\Rightarrow b_2 = 6$ y luego $\chi_{top}(T) = 0$.

2) Teoría de Hodge:

z_1, z_2 coord locales complejas en S $\rightsquigarrow$ 1-formas diferenciales

$$\omega = f(z_1,z_2)\,dz_1 + g(z_1,z_2)\,dz_2$$

holomorfa si f, g holom.

$\rightsquigarrow$ $H^0(S,\Omega^1_S)$ espacio vectorial de dichas formas.

Similar: $H^0(S,\Omega^2_S) \ni \omega \underset{loc}{=} f(z_1,z_2)\,dz_1\wedge dz_2$.

Obs: También tenemos $\underbrace{H^0(S,\Omega^0_S)}_{\text{funciones holom. en } S} = H^0(S,\mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}$ ($\uparrow$ S compacta)

La teoría de Hodge identifica estos espacios con ciertos espacios de cohomología:

$$H^0(S,\Omega^0_S) \qquad \to b_0 = h^{0,0}$$

$$H^0(S,\Omega^1_S) \quad H^1(S,\Omega^0_S) \qquad \to b_1 = h^{0,1}+h^{1,0}$$

$$H^0(S,\Omega^2_S) \quad H^1(S,\Omega^1_S) \quad H^2(S,\Omega^0_S) \qquad \to b_2 = h^{0,2}+h^{1,1}+h^{2,0}$$

Hodge: $H^1(S,\mathbb{C}) = H^0(S,\Omega^1_S) \oplus H^1(S,\Omega^0_S)$

$H^2(S,\mathbb{C}) = H^0(S,\Omega^2_S) \oplus H^1(S,\Omega^1_S) \oplus H^2(S,\Omega^0_S)$

y $H^p(S,\Omega^q_S) = \overline{H^q(S,\Omega^p_S)}$

c.f. Sup. de Riemann C: $H^0(C,\mathcal{O}_C) \cong \mathbb{C}$

$\mathbb{C}^g \cong \underbrace{H^0(C,\Omega^1_C)}_{\text{formas holom.}}$ $\quad \underbrace{H^1(C,\mathcal{O}_C)}_{\text{formas antiholom}} \cong \mathbb{C}^g$ $\quad \Rightarrow b_1(C) = 2g$

3) Sucesión exacta de cohomología:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_S \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}_S^* \to 0$$

Se le asocia una sucesión

$$0 \to H^0(S,\mathbb{Z}) \to H^0(S,\mathcal{O}_S) \to H^0(S,\mathcal{O}_S^*) \to$$
$$\to H^1(S,\mathbb{Z}) \to H^1(S,\mathcal{O}_S) \to \boxed{H^1(S,\mathcal{O}_S^*)} \to$$
$$\to H^2(S,\mathbb{Z}) \to H^2(S,\mathcal{O}_S) \to \dots$$

Corresponde a todos los fibrados en línea en S
$\cong \mathrm{Pic}(S)$ "grupo de Picard"

La aplicación

$$c_1 : \underset{\substack{\text{IIS} \\ \operatorname{Pic}(S)}}{H^1(S, \mathcal{O}_S^*)} \longrightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$ es la <u>primera clase de Chern</u>.

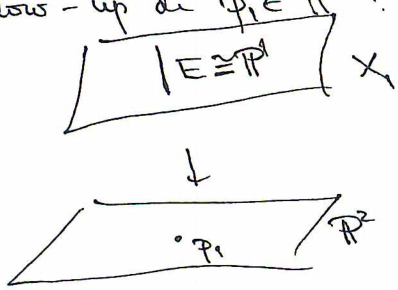
E.g. $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0$ y luego $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$.

E.g. Si $S = T$ sup abeliana, T es proyectiva si $\exists L \in \operatorname{Pic}(S)$ tq $c_1(L)$ (forma alternada) cumple ciertas propiedades.

<u>superficies de del Pezzo</u>:

Sean $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$ puntos en posición general (no hay 3 en una línea, no hay 6 en una cónica, etc)

Sea X_1 el blow-up de $p_1 \in \mathbb{P}^2$:



$\operatorname{Pic}(X_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$

Sea X_2 blow-up de $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2 \rightsquigarrow \operatorname{Pic}(X_2) \cong \mathbb{Z}^3$

En gral, $\operatorname{Pic}(X_r) \cong \mathbb{Z}^{r+1} \ni E_1, \dots, E_r, E_0$ ← recta genérica

<u>Hecho</u>: Existe un producto intersección

$$\langle \, , \rangle : \operatorname{Pic}(X) \times \operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(E_i \cdot E_i) = -1.$$

Observamos que X_r birracional con $\mathbb{P}^2$, luego X_r racional.

<u>Del Pezzo</u>: $1 \leq r \leq 6$

Considero cúbicas en $\mathbb{P}^2$ pasando por los puntos $p_1, \dots, p_r$: L_r "sistema lineal"

$[x_0, x_1, x_2]$ hay $\binom{3+3}{3} = 10$ cúbicas $\rightsquigarrow 9$ (dimensión proyectiva). $|3l - p_1 - \dots - p_r|$

Pasar por r puntos disminuye la dim en r

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} L_r = 9 - r.$$

<u>Obs</u>: Si $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2$ un blow-up $\Rightarrow K_X = \pi^* K_{\mathbb{P}^2} + E$

Por otra parte, tenemos $X_r \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2$ el blow-up de $p_1, \dots, p_r$.

$\Rightarrow K_{X_r} = \pi^* K_{\mathbb{P}^2} + E_1 + \dots + E_r$

Usando las cúbicas que pasan por $p_1, \dots, p_r$ obtenemos

$$X_r \xhookrightarrow{L_r} \mathbb{P}^{9-r}.$$

Ejemplo: $S_6 \xhookrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^3$ y se verifica $\varphi(S_6) = D_3 \subseteq \mathbb{P}^3$ superficie (racional) de grado 3.

Tenemos que $\mathrm{Pic}(D_3) \cong \mathbb{Z}^7$ generado por $\underbrace{E_0}_{\text{recta genérica}}, E_1, \dots, E_6$.

$E_0^2 = 1, \quad E_i^2 = -1, \quad i = 1, \dots, 6$

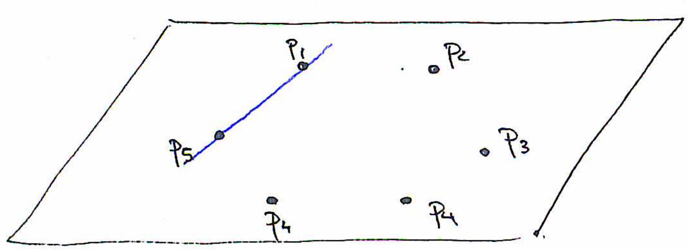
$E_0 \cdot E_i = 0, \quad E_i \cdot E_j = 0.$

$\rightsquigarrow$ Dotamos a $\mathrm{Pic}(D_3)$ de una forma bilineal de matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Retículado de signatura $(1,6)$.

$(-3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^\perp \cong -E_6$

Observamos que D_3 contiene 27 rectas:



$p_i \rightsquigarrow E_i \cong \mathbb{P}^1$ (6 rectas)

$l_{ij} = \overline{p_i p_j} \rightsquigarrow \underbrace{5 + 4 + 3 + 2 + 1}_{= 15}$

Por 5 pts hay 1 cónica ($\cong \mathbb{P}^1$)

$\Rightarrow$ 6 rectas más

Luego, hay $27 = 15 + 6$ rectas en D_3.

Threefold cúbico: $X \hookrightarrow \mathbb{P}^4$

$$\text{e.g. } \{x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=0\} \subseteq \mathbb{P}^4 \ni [x_0,\dots,x_4]$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^4 & \ni & [x_0,\dots,x_4] \\ \big\downarrow{\scriptstyle 3:1} & & \big\downarrow \\ \mathbb{P}^3 & \ni & [x_0,\dots,x_3] \end{array}$$

Cálculo de $\chi_{top}(X)$:

Se ramifica en la cúbica de $\mathbb{P}^3$; $Y \subseteq \mathbb{P}^3$

$$\Rightarrow \chi_{top}(X) = 3\left(\chi_{top}(\mathbb{P}_3) - \chi(Y)\right) + \chi(Y)$$

Calculamos $\chi(Y)$ por recurrencia (mismo truco)

$$\Rightarrow \chi_{top}(X) = -6. \Rightarrow b_3 = 10$$

Hodge: $\underbrace{H^{2,1}(X)}_{\cong \mathbb{C}^5} \oplus \underbrace{H^{1,2}(X)}_{\cong \mathbb{C}^5} \cong H^3(X,\mathbb{C})$

Podemos definir un toro $T = H^{2,1}(X)/H_3(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{10}$

$\uparrow$ variedad abeliana de dim 5 ("jacobiana intermedia")

Clemens & Griffiths usan esta jacobiana intermedia para probar que X no es racional!