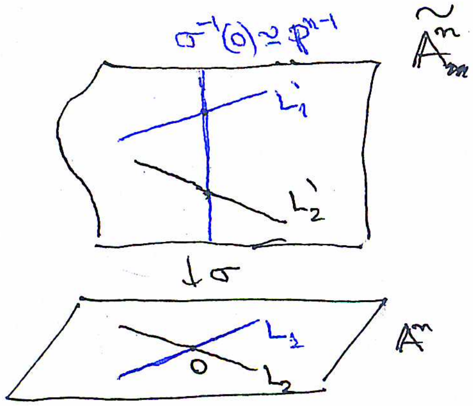
Geometría Algebraica (Semana 7): "Blow-up, espacio tangente y puntos singulares"

Blow-up: Sea $O=(0,\dots,0)\in\mathbb{A}^n$. Consideremos el producto $\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}$.

Definimos el blow-up de $\mathbb{A}^n$ en O como

$$\widetilde{\mathbb{A}^n}=\{((x_1,\dots,x_n),[y_1:\dots:y_n])\in\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}\mid x_i y_j=x_j y_i\}$$

$$\begin{tikzcd}
(x,y)\in\widetilde{\mathbb{A}^n} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}\ni(x,y) \arrow[d, "pr_1(x,y)=x"] \\
& x\in\mathbb{A}^n
\end{tikzcd}$$



(a) Si $p\in\mathbb{A}^n\setminus\{0\}$ entonces $\sigma^{-1}(p)=\{(p,[y_1,\dots,y_n])\in\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}\}$

Si $p=(a_1,\dots,a_n)$, $a_i\neq 0$ para cierto i.

$\Rightarrow y_j=\dfrac{a_j}{a_i}y_i$

En coord proyectivas: $[y_1,\dots,y_n]=[a_1,\dots,a_n]$

$\Rightarrow \sigma^{-1}(p)=(p,[p])$.

(b) $\sigma^{-1}(0)=\{((0,\dots,0),[y_1,\dots,y_n])\in\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}\}\simeq\mathbb{P}^{n-1}$

En part, σ no es un morfismo finito.

(c) Los puntos de $\sigma^{-1}(0)$ están en corresp. 1-1 con las líneas L que pasan por O.

$L=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{A}^n\mid x_i=a_it,\ t\in k,\ a_i\in k\}$

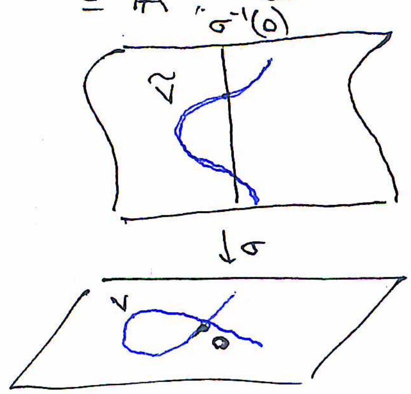
$L':=\overline{\sigma^{-1}(L\setminus\{0\})}$ en $\widetilde{\mathbb{A}^n}$ ("transformada estricta")

$L'=\{((a_1t,\dots,ta_n),[a_1,\dots,a_n]),\ t\in k\}$.

El punto $Q = ((0,\dots,0),[a_1,\dots,a_n]) \in \sigma^{-1}(0) \cap L'$.

Correspondencia 1-1 entre L y Q.

<u>Def</u>: Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ var. alg afín tq $0 \in V$. El <u>blow-up de V en 0</u> es
$\tilde{V} = \overline{\sigma^{-1}(V\setminus\{0\})}^{Zar} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}^n$ donde $\sigma: \tilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{A}^n$ blow-up de $\mathbb{A}^n$ en 0.



$E = \sigma^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$
"divisor" excepcional

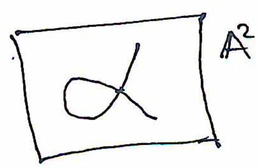
<u>Prop</u>: $\phi: \sigma|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ es un morfismo birracional.

<u>Dem</u>: $U = \tilde{V} \setminus \sigma^{-1}(0)$, $W = V\setminus\{0\}$.

$\sigma: \tilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{A}^n$ y $\phi = \sigma|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$.

$\Rightarrow \phi: \tilde{V}\setminus\sigma^{-1}(0) \to V\setminus\{0\}$, $(x,y) \longmapsto x$ y $V\setminus\{0\} \to \tilde{V}\setminus\sigma^{-1}(0)$, $x \longmapsto (x,x)$ ∎

<u>Ejemplo</u>: $X = V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2$



$O = (0,0) \in X$.

$\tilde{X} = \{((x,y),[t,u]) \in \mathbb{A}^2\times\mathbb{P}^1 \mid xu = yt,\ y^2 = x^2(x+1)\}$

Consideremos la carta $t \neq 0$: $[t,u] = [1,\underset{\underset{\mathbb{A}^1}{\wr\wr}}{u}]$

$\Rightarrow y = xu$

Luego: $\tilde{X} \cap \{t\neq 0\}$ dado por $\begin{cases} y = xu \\ y^2 = x^2(x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow (xu)^2 = x^2(x+1) \iff x^2(u^2-(x+1)) = 0 \Rightarrow x^2 = 0,\ u^2 = x+1$.

En $\mathbb{A}^3$ con coord (x,y,u): tenemos que $E = \{(x,y,u),\ \text{tq}\ x^2=0,\ y=0\}$ es la "curva excepcional"

$\tilde{X} \cap \{t\neq 0\} = \{(x,y,u) \in \mathbb{A}^3 \mid u^2 = x+1,\ y = xu\}$ (transf. estricta).

Espacio tangente:

Sea $S = \{ f(x_1, \dots, x_n) = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie. Sea $a \in S$.

Usando una "formula de Taylor":

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \dots, a_n) + \dots$$

en una vecindad de $a \in S$, $x_i := a + h_i$

Evaluando en $(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) \in S$:

$$0 = f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = \sum (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow T_a S = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_a \mid \sum (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = 0 \}.$$

Geometría diferencial: $(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n)$, $h \to 0$ $\longleftrightarrow$ Geometría algebraica: $(a_1 + \varepsilon b_1, \dots, a_n + \varepsilon b_n)$, $\varepsilon^2 = 0$

Idea: $O(n,k) = \{ A^t A = I \}$ variedad alg $\subseteq M_{n \times n}(k) \simeq \mathbb{A}^{n^2}$

Una deformación $A + \varepsilon B \in O(n,k)$

$$\iff (A + \varepsilon B)^t (A + \varepsilon B) = I$$

$$\iff (A^t + \varepsilon B^t)(A + \varepsilon B) = I$$

$$\iff \underbrace{A^t A}_{=I} + \varepsilon (A^t B + B^t A) + \cancel{\varepsilon^2}^{\,0} B^t B = I$$

$$\Rightarrow T_I \, O(n,k) = \{ B^t = -B \}.$$

Sea V una variedad alg afín y $x \in V$ un punto:

x corresponde a un ideal maximal $m_x \subseteq \mathcal{O}_V(V)$

$$m_x = \{ f \in \mathcal{O}_V(V) : f(x) = 0 \} = \ker(\chi_x : \mathcal{O}_V(V) \to k, \ f \mapsto f(x)).$$

Otra forma de ver un punto $x \in V$ es como un (punto) "esquema" p:

$V \longleftrightarrow \mathcal{O}_V(V)$

$p \longleftrightarrow \mathcal{O}_p(p) = \mathcal{O}(V)/m_p \cong k.$ $\quad (p = \mathrm{Spec}(k)).$

Vemos x como la variedad p con su haz de funciones regulares $\mathcal{O}_p(p) = k$.

$$\chi_x : \mathcal{O}_V(V) \underset{\text{alg}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_p(p) \longleftrightarrow x : p \xhookrightarrow{\text{inclusión}} V$$

Una deformación en V es un punto

p_ε tal que $\mathcal{O}_{p_\varepsilon}(p_\varepsilon) = k[\varepsilon] := k[x]/\langle x^2\rangle = \{a+b\varepsilon,\ \varepsilon^2=0\}$.
$a,b\in k$.

$i: p \to p_\varepsilon$

definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{p_\varepsilon}(p_\varepsilon) & \longrightarrow & \mathcal{O}_p(p) \\ \| & & \| \\ k[\varepsilon] & \longrightarrow & k \\ \varepsilon & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Def: Sea V var alg afín, $x\in V$. Una deformación de V en x es un morfismo

$t: p_\varepsilon \to V$ tal que:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "x"'] & p_\varepsilon \arrow[d, "t"] \\ & V \end{tikzcd} \qquad t\circ i = x$$

$\mathrm{Def}(V,x) = \{i: p_\varepsilon \to V \mid t \text{ def de } V \text{ en } x\}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_V(V) \arrow[r, "t^*"] \arrow[dr, "\chi_x"'] & k[\varepsilon] \arrow[d, "p"] \\ & k \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} \varepsilon \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \qquad p\circ t^* = \chi_x$$

t^* es una función lineal y $t^*(f) = a+b\varepsilon$

Observamos que $p(t^*(f)) = a = \chi_x(f) = f(x)$

$\Rightarrow t^*(f) = f(x) + \varepsilon\, v_t(f)$.

Luego: $t^* = \chi_x + \varepsilon\, v_t$

Además: $t^*(fg) = f(x)g(x) + \varepsilon\, v_t(fg)$

$$\overset{\|}{(t^*(f))(t^*(g))} = (f(x)+\varepsilon v_t(f))(g(x)+\varepsilon v_t(g))$$
$$= f(x)g(x) + \varepsilon(v_t(f)g(x) + f(x)v_t(g)) + \overset{0}{\cancel{\varepsilon^2 (v_t(f)v_t(g))}}$$

$\Longleftrightarrow v_t(fg) = f(x)v_t(g) + g(x)v_t(f)$ ("derivada del producto").

Luego $t^* \rightsquigarrow v_t$

Definimos $T_xV = \{v: \mathcal{O}_V(V)\to k \mid v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f)\}$
"derivaciones"

$$\begin{array}{ccc} v_t & & T_xV \\ \uparrow & & \cong \\ t^* & & \mathrm{Def}(V,x) \end{array}$$

Ejemplo 1) $\mathbb{A}^n$, $a \in \mathbb{A}^n$

$$T_a V = \{ t^* : k[x_1, \dots, x_n] \to k[\varepsilon] \mid \chi_a = p \circ t^* \}.$$

$$t^*(x_i) = \underbrace{a_i}_{= x_i(a)} + \varepsilon b_i, \quad b_i \in k.$$

t^* corresponde a $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{A}^n \Rightarrow T_a \mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^n$.

2) $V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$

Sea $t^* : \dfrac{k[x_1, \dots, x_n]}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle} \longrightarrow k$

$$t^*(x_i) = a_i + \varepsilon b_i$$

$$0 = t^*(f_j) = f_j(a + \varepsilon b) = \underbrace{f_j(a)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) + \cancel{\varepsilon^2 \dots}^{\,0}$$

$\Rightarrow v_t$ corresponde al vector $(b_1, \dots, b_n)$.

si $d_a(f_1, \dots, f_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Rightarrow T_a V = \ker(d_a)$.

Prop: Sea V una var. alg. afín, $x \in V$. Entonces:

$$T_x V \cong (m_x / m_x^2)^*$$

Def: Un punto $x \in V$ es no-singular si $\dim T_x V = \dim V$.

Teorema (Criterio Jacobiano): Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ var. alg irred. de $\dim(V) = d$. Entonces $x \in V$ es no singular (o suave) $\Leftrightarrow$ rango $d_a(f_1, \dots, f_r) = n - d$.

Ejemplo: $X = V(\underbrace{y^2 - x^2 - x^3}_{f}) \subseteq \mathbb{A}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2x^2 - 3x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ es singular.}$$

Ejercicio: $u^2 = x + 1$ es suave.