Geometría Algebraica (Semana 6):

Def (aplicación racional): Sean X, Y var. alg. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ abiertos densos de X y sean $f : \mathcal{U} \to Y$, $f' : \mathcal{U}' \to Y$ morfismos regulares. Definimos la rel. de equiv.:

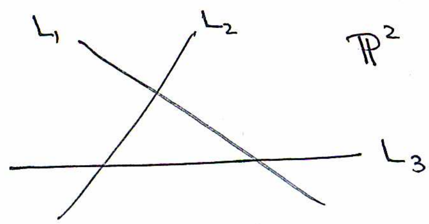
$$(\mathcal{U}, f) \sim (\mathcal{U}', f') \overset{def}{\Longleftrightarrow} f|_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'} = f'|_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'}.$$

Una aplicación racional $f : X \dashrightarrow Y$ es una clase de equivalencia $[(\mathcal{U}, f)]$.

Ejemplo: $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$

$$[x:y:z] \mapsto [yz : xz : xy]$$

no está definida en las rectas $L_1 = \{y = z = 0\}$, $L_2 = \{x = z = 0\}$, $L_3 = \{x = y = 0\}$



$$\mathcal{U} = \mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3).$$

Obs: En el abierto $\underbrace{\{x \neq 0\} \cap \{y \neq 0\} \cap \{z \neq 0\}}_{\mathcal{U}'}$: $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$

$$[x:y:z] \mapsto [yz : xz : xy] = \left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right]$$

Def: Una *función racional* es una aplicación racional $f : X \dashrightarrow k$.
Denotamos por $\mathrm{Rat}(X)$ o $k(X)$ el conj. de funciones racionales. (k-álgebra)

Prop: Sea X var. alg. Entonces:
1) Si $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto denso, $\mathrm{Rat}(\mathcal{U}) \cong \mathrm{Rat}(X)$
2) Si X irreducible, $\mathrm{Rat}(X)$ es un cuerpo.
3) Si X irred. afín, $\mathrm{Rat}(X)$ es el cuerpo de fracciones de $A = \mathcal{O}_X(X)$.

Dem: 1) Por definición ✓
2) Si X irred y $f : \mathcal{U} \to k$ función regular, $\mathcal{U}$ abierto denso (afín)
$\Rightarrow \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\}$ abierto denso (ejercicio).
En este abierto, $\frac{1}{f}$ es inversa de f $\Rightarrow \mathrm{Rat}(X)$ cuerpo.

Obs (tarea): Si $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ comp. irred $\Rightarrow \mathrm{Rat}(X) \cong \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Rat}(X_i)$.

3) Si $\frac{f}{g} \in \mathrm{Fr}(A) \Rightarrow \frac{f}{g} : X \setminus V(g) \to k$ función racional.

Si $f : \mathcal{U} \to k$ función racional, $\mathcal{U}$ abierto denso (afín)
$\Rightarrow X \setminus \mathcal{U} = V(h)$ cierto $h \in A$

Sea $V = \{x \in X \mid h(x) \neq 0\}$. $\boxed{\text{Ejercicio}}$: $\mathcal{O}_V(V) = A_h \ni \frac{g}{h^n}$, $g \in A$ (localización)
$\Rightarrow \exists\, g, n \in \mathbb{N}$ tq $f = \frac{g}{h^n} \in \mathrm{Fr}(A)$ ∎

Def: Un morfismo regular $u: \mathcal{U} \to V$ es <u>dominante</u> si su imagen es densa.

- Una aplicación racional $f: X \dashrightarrow Y$ es dominante si posee un representante dominante.

Obs: Si $f: X \dashrightarrow Y$ dominante y $g: Y \dashrightarrow Z$ racional

$\Rightarrow g \circ f : X \dashrightarrow Z$ bien definida.

En part $(Z = k)$, hay una inclusión $\mathrm{Rat}(Y) \overset{f^*}{\hookrightarrow} \mathrm{Rat}(X)$

$$g \longmapsto g \circ f$$

Prop: Sean X, Y var alg <u>irred</u>.

1) $\left\{ \begin{array}{l} f: X \dashrightarrow Y \\ \text{rac. } \underline{\text{dominante}} \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} k\text{- extensiones de cuerpos} \\ \mathrm{Rat}(Y) \subseteq \mathrm{Rat}(Y) \end{array} \right\}$

$$f \longmapsto f^* : \mathrm{Rat}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Rat}(X)$$

2) f^* isomorfismo $\Longleftrightarrow \exists\, \mathcal{U} \subseteq X, \exists\, V \subseteq Y$ abiertos densos tq $\mathcal{U} \cong V$.

Diremos que f es una <u>aplicación birracional</u>: $X \underset{\text{bir}}{\overset{\sim}{\dashrightarrow}} Y$

Dem: Sea $i: \mathrm{Rat}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Rat}(X)$ ext. de cuerpos

Obs: Podemos suponer $X \subseteq \mathbb{A}^m$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ afines.

$\Rightarrow i(y_j) = \dfrac{a_j}{b_j}$, $j = 1, \ldots, n$, $a_j, b_j \in \mathcal{O}_X(X) =: A(X) = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle_{k\text{-alg}}$

$\Rightarrow A(Y) \hookrightarrow A(X)_{b_1 \cdots b_n}$ ← localización

Igual que antes: $\exists\, f: X \setminus V(b_1 \cdots b_n) \to Y$ aplicación regular dominante

Tarea: $f^* = i \quad \Rightarrow 1)$ ✓

Si i es un isom: $x_i = i\left(\dfrac{c_i}{d_i}\right)$, $b_j = i\left(\dfrac{c_j'}{d_j'}\right)$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $A(Y)_{d_1 \cdots d_m d_1' \cdots d_m'} \cong A(X)_{b_1 \cdots b_n\, i(d_1) \cdots i(d_m)}$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$V \subseteq Y$ abierto denso $\qquad \mathcal{U} \subseteq X$ abierto denso ∎

Obs: Si $f: X \to Y$ morfismo regular entre var. irred con $f^*: \mathrm{Rat}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rat}(X)$ decimos que f es un <u>morfismo birracional</u>.

Ej: $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x:y:z] \longmapsto [yz : xz : xy]$ aplicación birracional $f \circ f = \mathrm{Id}$

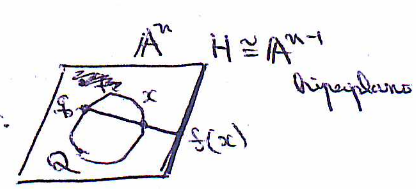
<u>Próxima semana</u>: Blow-up es un morfismo birracional.

Def: X es <u>racional</u> si $X \underset{\text{bir}}{\overset{\sim}{\dashrightarrow}} \mathbb{A}^n$ $\quad (\Leftrightarrow \mathrm{Rat}(X) = k(x_1, \ldots, x_n))$

<u>Ejemplos</u>: 1) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 = y^3\} \underset{\text{bir}}{\overset{\sim}{\dashrightarrow}} \mathbb{A}^1$.

2) $\mathbb{P}^n$, $Gr(k, N)$ son racionales

3) $(\mathrm{car}(k) \neq 2)$: Una <u>cuádrica</u> irred Q en $\mathbb{A}^n$ es racional:



$$f: Q \overset{\sim}{\dashrightarrow} H$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Dimensión:

Recuerdo: $K \subset L$ ext de cuerpos. Una base de trascendencia $B \subseteq L$ de L sobre K si:
i) Elem. de B son alg. indep.
ii) La extensión $K(B) \subset L$ es algebraica (finita)

Prop: Si L gen. por finitos elem. en K, entonces:
1) $\exists$ base de trasc. finita
2) Todas las bases tienen el mismo cardinal $\mathrm{tr\,deg}_K(L)$

Def: Sea X var. alg irred. Definimos $\dim(X) := \mathrm{tr\,deg}_k \mathrm{Rat}(X)$
Si X reducible y $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ comp. irred, $\dim(X) := \max\{\dim(X_i)\}$.
Dado $x \in X$, definimos $\dim_x(X) = \max\limits_{x \in X_i}\{\dim(X_i)\}$.

Ejemplo: $\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(\mathbb{P}^n) = n$
$\dim \mathrm{Gr}(k, N) = k(N-k)$.

Def: X esp. top. noetheriano. La dimensión de Krull $\dim_K(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es el máximo d tq existe una cadena de cerrados irred $X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_d$.
Ejemplo: $\mathbb{A}^n \supset \mathbb{A}^{n-1} \supset \ldots \supset \mathbb{A}^1 \supset \mathbb{A}^0 \Rightarrow \dim_K(\mathbb{A}^n) \geq n$

Para comparar la dim usaremos:
Normalización de Noether (1926): X irred afín. Entonces, $\dim X = n \Leftrightarrow \exists f: X \to \mathbb{A}^n$
tq i) f sobreyectivo
ii) f es finito (en part, $f^{-1}(x)$ con $x \in \mathbb{A}^n$ son conjuntos finitos)

Morfismos finitos:

Recuerdo: $\varphi: A \to B$ morfismo de anillos ($\Rightarrow B$ es A-módulo). Entonces:
1) $x \in B$ es entero sobre A si $\exists$ rel. polinomial $x^n + \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) x^{n-i} = 0$, $a_i \in A$
2) B es entero sobre A si todo $x \in B$ lo es. ($\Leftrightarrow B$ A-mód fin. generado).

Def: a) Sup X, Y afines. $f: X \to Y$ es finito si $\mathcal{O}(X)$ entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ respecto a $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.
b) En gral, $f: X \to Y$ finito si $\exists Y = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i$ abierto afín, tq $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ es afín y $f|_{f^{-1}(\mathcal{U}_i)} : f^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_i$ es finito

Lema: Sea Y var afín. Sup $\exists$ cubrimiento de Y por $V_i = Y - V(g_i)$, $g_i \in \mathcal{O}(Y)$.
Sea $f: X \to Y$ morfismo. Sup. $\mathcal{U}_i = f^{-1}(V_i)$ afín y $f_i: \mathcal{U}_i \to V_i$ finito
$\Rightarrow X$ afín y f finito.

(ver pag 69 Le Potier, Prop 6.6).

<u>Prop</u>: Si $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo finito. Entonces para <u>todo</u> $V \subseteq Y$ afín, $f^{-1}(V)$ es afín y $f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \to V$ es finito

Consecuencia: ~~Comp~~ f, g finitos $\Rightarrow f \circ g$ finito.

<u>Dem</u>: $\boxed{\text{Caso 1}}$ $X = \mathrm{Specm}(A)$, $Y = \mathrm{Specm}(B)$ afines $\Rightarrow f^* : B \to A$ finito (entero)

Si $V = Y - V(g)$, $g \in \mathcal{O}(Y)$ $\Rightarrow \mathcal{U} = f^{-1}(V) = \mathrm{Specm}(A_{f^*(g)})$ y

$A_{f^*(g)}$ entero sobre B_g (pues A entero sobre B) ✓

Si V es un abierto cualquiera, cubrirlo por $V_i \cap V$, $V_i = Y - V(g_i)$

$\Rightarrow \mathcal{U}_i = f^{-1}(V_i)$ afín y $f_i : \mathcal{U}_i \to V_i$ finito

Lema $\Rightarrow f^{-1}(V)$ afín y $f^{-1}(V) \to V$ finito ✓✓

$\boxed{\text{Caso 2}}$ X, Y grales: $\exists\ Y = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$ cubr. afín tq $\mathcal{U}_i = f^{-1}(\mathcal{V}_i)$ afín, $f_i : \mathcal{U}_i \to V_i$ finito

Sea $V \subseteq Y$ afín, cubrir V por $V_{i,j} = \mathcal{V}_i - V(g_{i,j})$

Caso 1 $\Rightarrow f^{-1}(V_{i,j})$ afín y $f^{-1}(V_{i,j}) \to V_{i,j}$ finito $\underset{\text{Lema}}{\Longrightarrow} f^{-1}(V)$ afín y $f^{-1}(V) \to V$ finito ∎

<u>Prop</u>: Sea $f : X \to Y$ finito. Entonces

1) Las fibras $f^{-1}(y)$ son conj finitos
2) La imagen de f es cerrada

<u>Dem</u>: Podemos suponer X, Y afines: $A = \mathcal{O}(X)$, $B = \mathcal{O}(Y)$, $f^* : B \to A$

1) Elegir generadores $x_1, \dots, x_N$ de A (dando $X \subseteq \mathbb{A}^N$)

Cada $x_i \in A$ entero sobre B:

$$x_i^{n_i} + \sum_{j=1}^{n_i} f^*(b_{ij})\, x_i^{n_i - j} = 0. \quad (\star)$$

Si $x \in f^{-1}(y)$, $f^*(b_{ij})(x) = b_{ij}(y)$ depende sólo de $y \in Y$ (fijo)

$\underset{(\star)}{\Longrightarrow}$ finitas soluciones para x_i $\Rightarrow$ finitas sol. para $x \in X$.

2) Sea $I = \ker(f^*) \subseteq B$. Verificamos que $\mathrm{Im}(f) = V(I)$ cerrado ∎

<u>Ejemplos</u>:

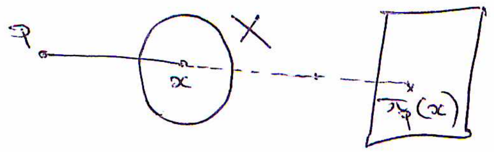
1) La proyección $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$ es finita.

2) $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3$, $(x,y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$ finito (ejercicio)

3) La proyección $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy = 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$ <u>no</u> es finita (~~pues~~ $\mathrm{Im}(f)$ no es cerrado).

4) (Prox. semana): El blow-up no es finito (fibras de cardinal infinito)

Def: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ cerrado y $p \in \mathbb{P}^n \setminus X$. Sea $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano tq $p \notin H$.



$\pi_p : \mathbb{P}^n - \{p\} \longrightarrow H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ <u>proyección</u> desde p.

Obs: Elegir coord. tq $p = [0, \dots, 0, 1]$ y $H = \{x_n = 0\}$

$\Rightarrow \pi_p([x_0, \dots, x_n]) = [x_0, \dots, x_{n-1}, 0] \in H$.

En part, $\pi_p(X)$ no depende de H (módulo isomorfismo).

Prop: Si $p = [0, \dots, 0, 1] \notin X \Rightarrow \pi_p : X \to H = \{x_n = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es <u>finito</u>.

Dem: Podemos suponer $X = V(f)$, $f(p) \neq 0$, f homogéneo de grado d

$$\Rightarrow f = x_n^d + \sum_{i=1}^{d} f_i(x_0, \dots, x_{n-1})\, x_n^{d-i}$$

Sea $U_i = \{x_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots, n-1$ con coord $y_j = \frac{x_j}{x_i}$

e.g. $\boxed{i=0}$: $\pi_p^{-1}(H \cap U_0) = X \cap U_0$ y $\pi_p|_{U_0} : X \cap U_0 \longrightarrow U_0$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto (y_1, \dots, y_{n-1})$$

y_n entera sobre $\mathcal{O}(U_0) = k[y_1, \dots, y_{n-1}]$:

$$y_n^d + \sum a_i y_n^{d-i} = 0 \quad \text{con} \quad a_i = f_i(1, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathcal{O}(U_0)$$

$\Rightarrow \mathcal{O}(Z \cap U_0)$ entero sobre $\mathcal{O}(H \cap U_0)$

$\Rightarrow \pi_p : X \to H$ finito ■

Corolario: (Normalización de Noether):

$$\begin{array}{ccc} X & \subseteq & \mathbb{A}^n =: U_0 \\ \cap & & \cap \\ \overline{X} & \subseteq & \mathbb{P}^n \end{array}$$

var afín irred, $X = \overline{X} \cap U_0$

(e.g. $\{x^2 + y^2 = 1\}$ en $\mathbb{A}^2_{(x,y)}$
$\subset$
$\{x^2 + y^2 = z^2\}$ en $\mathbb{P}^2_{[x,y,z]}$

Sea $p \notin U_0$:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_p : & \overline{X} & \xrightarrow{\text{finito}} & H \cong \mathbb{P}^{n-1} \\ & \cup & & \cup \\ \pi_p|_X : & X & \xrightarrow{\text{finito}} & \mathbb{A}^{n-1} \end{array}$$

Si es sobreyectiva OK ✓

Sino: proyectar de nuevo hasta ser sobre. ■

Teorema: Sea X var alg irred, entonces
$$\dim(X) = \dim_{Krull}(X)$$

Prop: Sea $f: X \to Y$ finito sobreyectivo, X, Y irred. Entonces:
1) $\dim(X) = \dim(Y)$
2) $\dim_K(X) = \dim_K(Y)$

Dem: Podemos sup X, Y afines $\Rightarrow \mathcal{O}(X)$ entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ vía $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$
$\Rightarrow Rat(X)$ extensión algebraica de $Rat(Y)$

1): $\Rightarrow \underbrace{\text{tr deg}_k Rat(X)}_{\dim(X)} = \underbrace{\text{tr deg}_k Rat(Y)}_{\dim(Y)}$.

2): Sea $X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_d$ cadena de cerrados irred en X
$\Rightarrow f(X_0) \subseteq \dots \subseteq f(X_d)$ cadena de cerrados irred en Y (pues f finito)
Sea $Y_i = f(X_i)$. Queremos $Y_i \neq Y_{i+1}$:

Lema (Cohen-Seidenberg): $f: X \to Y$ finito sobre, $X_1, X_2 \subset X$ cerrados irred tq $f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow X_1, X_2$ no son comparables (ie $X_1 \not\subseteq X_2$, $X_2 \not\subseteq X_1$).

$\underset{CS}{\Rightarrow} \dim_K(Y) \geq \dim_K(X)$.

Veamos que $\dim_K(Y) \leq \dim_K(X)$: Sea $Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_d$ cadena de cerrados irred en Y
$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(Y_0)}_{X_0} \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{f^{-1}(Y_d)}_{X_d}$ cadena de cerrados (no nec irred) en X

Escribir $\underset{f^{-1}(Y_i)}{X_i} = \bigcup_{j=1}^{m_i} \underbrace{Z_{i,j}}_{\text{irred cerrado}} \underset{f \text{ sobre}}{\Rightarrow} Y_i = \underbrace{f(Z_{i,1})}_{\text{cerrado irred}} \cup \dots f(Z_{i,m})$

$\underset{Y_i \text{ irred}}{\Rightarrow} \exists j$ tq $Y_i = f(Z_{i,j})$

Cambiar $X_i := Z_{i,j} \Rightarrow X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_d$ cadena de cerrados irred ∎

Dem del Teorema: Podemos sup X afín, $X \subseteq \mathbb{A}^n$, y usar inducción en n: $n=0$ ✓

Caso 1 $X \subsetneq \mathbb{A}^n \underset{\text{Noether}}{\Rightarrow} \exists f: X \to \mathbb{A}^m$ finito sobre con $m < n$
$\Rightarrow \dim_K(X) = \dim_K(\mathbb{A}^m)$ (Prop)
$= \dim(\mathbb{A}^m)$ (inducción)
$= \dim(X)$ (Prop) ✓

Caso 2: $X = \mathbb{A}^n$. Sabemos: $\dim(\mathbb{A}^n) = n$ y $\dim_K(\mathbb{A}^n) \geq n$. Sea $d = \dim_K(\mathbb{A}^n)$ y $X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_{d-1} \subseteq \mathbb{A}^n$ cadena de cerrados irred
$\Rightarrow \dim_K(X_{d-1}) \geq d-1$. Como $X_{d-1} \subsetneq \mathbb{A}^n$, $\exists X_{d-1} \to \mathbb{A}^m$ finito sobre, $m<n$
Luego: $d-1 \leq \dim_K(X_{d-1}) \underset{\text{Prop}}{=} \dim_K(\mathbb{A}^m) \underset{\text{Inducción}}{=} m \leq n-1 \Rightarrow d \leq n \Rightarrow d = n$ ∎