Definimos $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}/\sim$, $x\sim y \iff x=\lambda y$, $\lambda\in k^*$
espacio proyectivo. Posee una proyección $\pi: \mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^n$
Consideramos $\mathbb{P}^n$ como espacio anillado $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}=\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}})^{k^*}$

Prop: $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica.

Dem: $(x_0,\dots,x_n)$ coordenadas de $\mathbb{A}^{n+1}$. Consideremos $i\in\{0,\dots,n\}$.
Sean $V(x_i-1)=: A_i\subseteq\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ y $\mathcal{U}_i:=\{[x] : x_i\neq 0\}\subseteq\mathbb{P}^n$

Consideremos $\alpha_i: \mathcal{U}_i \longrightarrow A_i$ (con inversa la proyección $\pi|_{A_i}$)
$[x]\longmapsto \frac{x}{x_i}$

α_i es continua $\iff$ $\alpha_i\circ\pi$ es continua (top. cociente):
$\alpha_i\circ\pi : \pi^{-1}(\mathcal{U}_i)\longrightarrow A_i$
x (con $x_i\neq 0$) $\longmapsto \frac{x}{x_i}$

Obs: $A_i\cong\mathbb{A}^n$

$\Rightarrow (\alpha_i,\alpha_i^*) : (\mathcal{U}_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{U}_i}) \xrightarrow{\sim} (A_i, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}|_{A_i})$

Así: $\mathbb{P}^n=\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$ y $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica ∎

Obs: En gral X esp. topológico Noetheriano, entonces cualquier cociente $X/\sim$ es Noetheriano.

Importante: Si X es una variedad alg, $Y\subseteq X$ cerrado
$\mathcal{I}_Y=\{s \text{ tq } s_y=0\ \forall y\in Y\}\subseteq\mathcal{O}_X$, $\mathcal{I}_Y(\mathcal{U})$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$, $\forall\,\mathcal{U}\subseteq X$ abierto

$\Rightarrow (Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)$ es una variedad alg.
↳ Aquí: $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)(\mathcal{U})=\mathcal{O}_X(\mathcal{U})/\mathcal{I}_Y(\mathcal{U})$

Con las condiciones anteriores decimos que Y es una subvariedad alg cerrada de X.

Si $f : Z \to X$ es un morfismo de var. alg y existe Y sub var alg cerrada de X tq $f = i \circ g$, $i : Y \hookrightarrow X$, $g : Z \underset{\text{isom.}}{\xrightarrow{\sim}} Y$ entonces f es una incrustación (embedding)

Def: Una variedad X es proyectiva si existe una incrustación de X a un $\mathbb{P}^n$.

Prop: La categoría de variedades proyectivas admite un producto.

Dem: Basta probar que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es una sub. var. algebraica cerrada de $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ $\left(= \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \right)$

Sea E de dim $n+1$ $(\Rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E))$, F de dim $m+1$ $(\Rightarrow \mathbb{P}^m = \mathbb{P}(F))$ y luego $\dim(E \otimes F) = nm + n + m + 1$.

Definimos
$$\phi : E\setminus\{0\} \times F\setminus\{0\} \longrightarrow E \otimes F \setminus \{0\}$$
$$(x, y) \longmapsto x \otimes y$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in k^*$, $\underbrace{\phi(\lambda_1 x, \lambda_2 y)}_{\in ([x],[y])} = \underbrace{\lambda_1 \lambda_2\, x \otimes y}_{\in [x \otimes y]}$.

Queremos analizar
$$\Phi : \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F) \longrightarrow \mathbb{P}(E \otimes F)$$
$$([x], [y]) \longrightarrow [x \otimes y]$$

[Con haces $((\pi_E)_* \mathcal{O}_{E\setminus\{0\}})^{k^*} \ldots$]

$$\overset{x}{\overset{\shortparallel}{(x_0, \ldots, x_n)}}, \overset{y}{\overset{\shortparallel}{(y_0, \ldots, y_m)}} \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{polinomial}}]{} \begin{bmatrix} x_0 y_0 & \cdots & x_n y_0 \\ x_0 y_m & & x_n y_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $E = F = k^2$, $\Phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$
$$([(x_0, x_1)], [(y_0, y_1)]) \longmapsto [(x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1)]$$

$$([1 : x_1], [1 : y_1]) \longmapsto [1 : y_1 : x_1 : x_1 y_1]$$
$$([0 : 1], [1 : y_1]) \longmapsto [0 : 0 : 1 : y_1].$$

Para $0 \leq k, l \leq n, m$: $\mathbb{P}(E)_k = \{[x], x_k \neq 0\}$
$$\mathbb{P}(F)_l = \{[y], y_l \neq 0\}$$

$$\mathbb{P}(E \otimes F)_{kl} = \{[u], u_{kl} \neq 0\}$$

$\Phi : \mathbb{P}(E)_k \times \mathbb{P}(F)_l \longrightarrow \mathbb{P}(E \otimes F)_{kl}$ (Inversa: $u \xrightarrow[\text{regular}]{} x = \frac{u_{k\cdot}}{u_{kl}}, \ y = \frac{u_{\cdot l}}{u_{kl}}$)

inmersión de Segre

Grassmanniana: Sea E un k-esp. vect, $0 \leq n \leq \dim(E)$

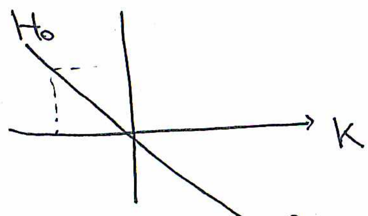
La grassmanniana $Gr(n,E) = \{ H \leq E$ sub esp. vect de $\dim(H) = n \}$.

Veremos que $Gr(n,E)$ es una variedad algebraica:

Sea $K \subseteq E$ sub-esp vect de $\operatorname{codim}_E(K) = n$

$\mathcal{U}_K := \{ H$ tq $H \oplus K = E \} = \{ H$ tq $H \cap K = \{0\}$ y $\dim H = n \}$.

Sea $H_0 \in \mathcal{U}_K$, consideramos una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(H_0, K)$



$Gr(T) = \{ h + Th \ , \ h \in H_0 \}$
↑
grafo

Obs: Si $k \in Gr(T) \cap K \Rightarrow k = h + Th \Rightarrow h = k - Th \in K \Rightarrow h = 0$
$\Rightarrow k = 0$

Luego $Gr(T) \cap K = \{0\}$.

Sea $H \in \mathcal{U}_K$ y sea $h \in H \subseteq H_0 \oplus K$, i.e., $h = h_0 + k$

Obs: Si $h_0 = 0 \Rightarrow h = k \Rightarrow h = 0$ y luego $h \longmapsto h_0$ es 1-1.
(dim finita $\Rightarrow$ biyectivo)

Sea $T_H : h_0 \longmapsto h \longmapsto k$ y $Gr(T_H) = \{ h_0 + Th_0 = h_0 + k = h \} = H$.

Sea $M = \dim(E)$. Luego:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_K & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}(H_0, K) \cong \mathbb{A}^{n(M-n)} \\ H & \longmapsto & T_H \\ Gr(T) & \longleftarrow\!\!\!| & T \end{array}$$

$(\Rightarrow \dim Gr(n,E) = n(M-n))$

Sean $H_0, H_1 \in \mathcal{U}_K$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_K \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathcal{L}(H_0, K) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathcal{L}(H_1, K) \end{tikzcd}$$

$\longleftarrow$ regular! (eligiendo bases es lineal)

Conclusión: $Gr(n, E)$ es una variedad algebraica. ∎

Veamos que $Gr(n,E)$ es proyectivo. Definimos la inmersión de Plücker:

$$\begin{aligned} Gr(n,E) &\xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}(\Lambda^n E) \\ H &\longmapsto \Lambda^n H \end{aligned}$$

[Recuerdo: $\Lambda^n E = E \otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes E / \sim$, $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = sgn(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)}$

y $\dim \Lambda^n E = \binom{\dim E}{n}$.

Veamos que Φ bien definido:

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de H , $\{w_1, \ldots, w_n\}$ base de H.

Queremos: $[v_1 \wedge \ldots \wedge v_n] = [w_1 \wedge \ldots \wedge w_n]$.

$\Rightarrow \exists$ isom $A : H \to H$, $w_i \mapsto v_i$ $\Rightarrow$ $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = \underbrace{\det(A)}_{\neq 0} v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$

Luego, $\Lambda^n H \in \mathbb{P}(\Lambda^n E)$

Queremos: $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \Rightarrow \operatorname{span}\{v_i\} = \operatorname{span}\{w_i\}$. (Tarea)