Geometría algebraica (Semana 3): "Variedades afines, funciones regulares, morfismos" (1

Recuerdo: Si $X$ esp. topológico, un prehaz en $k$-álgebras $\mathcal{F}$ verifica:

1) $\mathcal{F}(U)$ $k$-alg $\forall U \subseteq X$ abierto
2) Si $U \subseteq V \subseteq W$ : 

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{W,V}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{V,U}} & \mathcal{F}(U) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\ s & \longmapsto & s|_V & \longmapsto & (s|_V)|_U = s|_U \end{array}$$

"sección"

y $\mathcal{F}_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$.

Además, $\mathcal{F}$ es un haz si:

3) ("podemos pegar"): $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ , $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tq $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ $\forall i,j$
$\Rightarrow \exists\, s \in \mathcal{F}(U)$ tq $s|_{U_i} = s_i$ $\forall i$

4) ("de manera única"): 
Si $s \in \mathcal{F}(U)$ y $s|_{U_i} = 0$ $\forall i \Rightarrow s = 0$.


Ejemplo motivador: $X$ variedad compleja (e.g. abierto de $\mathbb{C}$) y

$$\mathcal{O}_X : \{U \subseteq X \text{ abierto}\} \to \{\mathbb{C}\text{-álgebras}\}$$
$$U \longmapsto \mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$$

Def: Un espacio anillado (en $k$-alg) es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ con:

1) $X$ esp. topológico
2) $\mathcal{O}_X$ haz en $k$-alg. sobre $X$ ("haz estructural")

Un morfismo $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es:

1) $f : X \to Y$ continua
2) $\varphi : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ morfismo de haces ("pull back" en $Y$ de funciones continuas")

Obs: Si $f : X \to Y$ continua, $\mathcal{F}$ haz en $X$, definimos el haz imagen directa $f_* \mathcal{F}$ en $Y$ por: $\underset{\text{abierto}}{V \subseteq Y}$, $(f_* \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$

Si $U \subseteq X$ abierto, definimos $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$.

Def ($\mathcal{O}_X$-módulo): $\mathcal{F}$ haz en $k$-esp. vect. es un $\mathcal{O}_X$-módulo si $\forall U \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo, tq las restricciones son morfismos de módulos.

E.g. $X$ var compleja, $\mathcal{O}_X$ fun. holom, $\Omega^p_X$ : haz de $p$-formas holom. es un $\mathcal{O}_X$-módulo

$$\omega \underset{loc}{=} \sum_{|I|=p} \omega_I(x)\, dx_I$$

con $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

## Variedades afines

Sea $A = k[x_1, .., x_n]$. Vimos que $\mathbb{A}^n$ posee una topología (de Zariski) con cerrados $V(S) := \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \ \forall f \in S\}$, $S \subseteq A$.
Además, $V(S) = V(\langle S \rangle)$ y $I \subseteq J \Rightarrow V(J) \subseteq V(I)$.

**Def**: Un esp. topológico es noetheriano si toda cadena decreciente de cerrados es eventualmente constante:

$$F_1 \supset \ldots \supset F_m \supset F_{m+1} \supset \ldots$$

$\Rightarrow \exists N$ tq $F_m = F_{m+1} \ \forall m \geq N$.

**Ej**: $\mathbb{A}^n$ noetherianos pues $I \longleftrightarrow V(I)$ corresp. decreciente.

**Def**: Un esp. top. es quasi-compacto si de todo cubrimiento abierto se puede extraer un cubrimiento finito:

$$X = \bigcup_{i \in I} \underset{\text{abierto}}{\mathcal{U}_i} \Rightarrow \exists \underset{\text{finito}}{J \subseteq I} \text{ tq } X = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$$

**Prop**: Todo esp. noetheriano es quasi-compacto.

**Dem**: Sean $F_i = X - \mathcal{U}_i$ cerrados. Si $J \subseteq I$, los $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ cubren $X$ si $\bigcap_{j \in J} F_j = \phi$.

Sup. por el contrario que toda $\bigcap_{\text{finita}} F_i \neq \phi$.

Sin pérdida de generalidad, sup. que $\{F_i\}_{i \in I}$ ~~...~~ familia estable por intersección.

$X$ noeth $\Rightarrow \exists F_m$ minimal: $F_m \cap F_i \subseteq F_m \underset{F_m \text{ minimal}}{\Longrightarrow} F_m \cap F_i = F_m$

ie $F_i \supseteq F_m \ \forall i \in I$, contradicción ∎

Consecuencia: • $\mathbb{A}^n$ ~~...~~ quasi-compacto.
• Todo cerrado alg de $\mathbb{A}^n$ quasi-compacto (pues noetherianos)

## Funciones regulares

⚠ Si $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid \underset{\text{pol. irred}}{f(x,y)} = 0\}$ (curva plana), los cerrados (Zariski) son $\phi$, $C$ y conj. finitos. $\Rightarrow$ Dos curvas $C_1$ y $C_2$ son siempre homeo (toda biyección es Zariski continua)

En lugar de funciones continuas, utilizaremos funciones regulares:

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado alg. (más gral: localmente cerrado, ie, $X = \underset{\text{cerrado}}{F} \cap \underset{\text{abierto}}{\mathcal{U}}$)

<u>Def</u>: Una <u>función regular</u> en $X$ es una función $f : X \to k$ tq $\forall x \in X$, $\exists\, \mathcal{U}_x$ vecindad de $x \in X$, $\exists\, P_x, Q_x$ polinomios con $Q_x(x) \neq 0$ tq:

$$f\big|_{\mathcal{U}_x} = \frac{P_x}{Q_x}\Big|_{\mathcal{U}_x}$$

<u>Prop</u>: Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado alg, toda $f : X \to k$ regular es restricción de un polinomio: $\exists P \in k[x_1, .., x_n]$ tq $f = P|_X$. En part, el álgebra de funciones regulares en $X$, $\mathcal{O}(X)$, es isomorfa a $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ $(= k[x_1, .., x_n]/I)$ con $I = I(X) = \{ f \in k[x_1, .., x_n] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X \}$.

<u>Dem</u>: $X = V(I)$, $I$ ideal. Sea $f : X \to k$ regular: $\forall x \in X$, $\exists\, \mathcal{U}_x, P_x, Q_x$ tq $f\, Q_x = P_x$ en $\mathcal{U}_x$

Escribamos $X \setminus \mathcal{U}_x = \{ y \in X \mid A_1(y) = \ldots = A_m(y) = 0 \}$ $\quad A_i$ polinomios

$\Rightarrow A_1 f\, Q_x = A_1 P_x \quad \forall x \in X$

Redefinir $Q_x := A_1 Q_x$, $P_x := A_1 P_x$, $Q_x(x) \neq 0$.

$\Rightarrow f\, Q_x = P_x \quad \forall x \in X \quad$ y $Q_x(x) \neq 0$.

Sea $J = \langle \{Q_x\}_{x \in X} \rangle$. Por construcción los $Q_x$ no tienen ceros comunes en $X$: $\emptyset = V(J) \cap \underbrace{V(I)}_{=X} = V(I + J)$.

Nullstellensatz: $I + J = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[x_1, .., x_n]$

$\Rightarrow \exists \underset{I}{B} + \sum_{i=1}^{\ell} \underset{J}{A_{x_i} Q_{x_i}} = 1 \quad \underset{\text{en } X : B = 0}{\Longrightarrow} \quad 1 \cdot f = \sum_{i=1}^{\ell} A_{x_i} \underbrace{f\, Q_{x_i}}_{P_{x_i}}$ ∎

<u>Obs</u>: Si $I \subseteq A$ ideal, definimos su <u>radical</u>:

$$\sqrt{I} := \{ f \in A \mid \exists\, m \in \mathbb{N}^{>0},\ f^n \in I \}.$$

Hilbert Nullstellensatz (reformulación):

$$\boxed{I(V(I)) = \sqrt{I}}$$

Fácil: $V(I) = V(\sqrt{I})$. Decimos que $I$ es <u>radical</u> si $I = \sqrt{I}$.

Luego, hay una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{c} I \text{ ideal radical} \\ \text{de } \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \end{array} \right\} \overset{1:1}{\underset{\sim}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{c} \text{cerrados alg.} \\ \text{en } \mathbb{A}^n \end{array} \right\}$$

$$I \longmapsto V(I)$$

$$J = \sqrt{J} = I(V(J)) \longleftarrow\!\shortmid V(J)$$

⚠ Si $X$ loc. cerrado, $\mathcal{O}_X : \{ \mathcal{U} \subseteq X \text{ abierto} \} \to \{ k\text{-alg} \}$

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{O}_X(\mathcal{U}) := \{ f : \mathcal{U} \to k \text{ regular} \}$$

es un <u>haz</u>, llamado haz de funciones regulares.

**Def**: Una variedad ~~afín~~ algebraica afín (reducida) sobre $k$ es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorfo al espacio anillado def por un cerrado alg de un espacio afín, dotado de su haz de funciones regulares.

**Obs**: El tallo (stalk) $\mathcal{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una $k$-álgebra local: $\exists!$ ideal maximal $m_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ dado por

$$m_x = \{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0 \}$$

y $\mathcal{O}_{X,x}/m_x \cong k$.

**Def**: Una variedad algebraica (reducida sobre $k$) es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tq:

1) $X$ esp. topológico noetheriano
2) $\forall x \in X$, $\exists\, \mathcal{U} \ni x$ abierto tq $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ es una variedad afín.

**Prop**: Todo abierto y todo cerrado de una var. alg es una var. algebraica.

**Idea**: $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto $\rightsquigarrow$ $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ esp. anillado.

* noetheriano ✓
* Queremos: $\mathcal{U}$ cubierto por var. afines.

Como $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i$ afín $\Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i)}_{\text{abierto en la var. alg afín } \mathcal{U}_i}$

$\updownarrow$ cerrado alg

Basta probar: $\forall\, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado (e.g. $Y = \mathcal{U}_i$) y $\mathcal{U} \subseteq Y$ abierto, entonces $\mathcal{U}$ cubierto por var. afines:

$$Y \setminus \mathcal{U} = \{ x \in \mathbb{A}^n \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0 \}$$

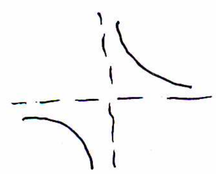
Sea $V_i = \{ x \in Y \mid f_i(x) \neq 0 \}$ abierto y $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$

Basta verificar: $V_i \cong$ cerrado alg en algún esp. afín.

Fácil: $W_i = \{ (x,t) \in \mathbb{A}^{n+1} \mid x \in Y,\ f_i(x)\,t = 1 \} \underset{\text{cerrado alg}}{\subseteq} \mathbb{A}^{n+1}$ verifica

$W_i \xrightarrow{\sim} V_i$ isom

$(x,t) \longmapsto x$



$\{xt = 1\}$

$\cong \{x \neq 0\}$.

Similar: si $Y \subseteq X$ cerrado $\rightsquigarrow (Y, \mathcal{O}_X|_Y)$ ✓

haz obtenido por restricción de funciones ■

**Notación**: $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ haz de funciones regulares en $X$ que se anulan en $Y$

$\Rightarrow \mathcal{O}_X|_Y \cong (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$. Por abuso de notación: $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$

$(= \mathcal{O}_X|_Y)$

Para una variedad alg. ~~g~~ afín $X$: si $A = \mathcal{O}_X(X)$ es el anillo de funciones regulares en $X$, entonces

$$X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Specm}(\cancel{A}) := \{ m \text{ ideal maximal en } A \} \qquad \underline{\underline{\text{biyectiva}}}.$$
$$x \longmapsto m_x = \{ f : X \to k \text{ regular tq } f(x) = 0 \}$$

Def: Sean $\cancel{V} \subseteq \mathbb{A}^n$, $\cancel{W} \subseteq \mathbb{A}^m$ var afines. Una aplicación $V \to W$ es ~~…~~ un <u>morfismo regular</u> si es la restricción ~~…~~ a $V$ de una aplicación $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ polinomial.

Obs: Si $u : V \to W$ morfismo regular, entonces $\exists$ morfismo de $k$-algebras

$$u^* : \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$$
$$f \longmapsto f \circ u$$

Prop: $u \longmapsto u^*$ es una biyección entre

$$\{ V \to W \text{ morfismo regular} \} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V) \\ \text{morfismo de } k\text{-alg} \end{array} \right\}$$

En part, $V \cong W \iff \mathcal{O}(V) \cong \mathcal{O}(W)$. cuando $V$ y $W$ son afines.

Teorema: Si $(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfismo de espacios anillados entre var alg (ie, $f : X \to Y$, $\varphi : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$))
$\Rightarrow f$ es regular y $\varphi = f^*$.