Geometría Algebraica (Semana 2): "Pre-haces y haces"

Def: Sea X un espacio topológico. Un pre-haz $\mathcal{F}$ es definido como:

1) $U \subseteq X$ abierto $\Rightarrow \mathcal{F}(U)$ un conjunto (o grupo, anillo, ...)
2) Si $U \subseteq V \subseteq X$ abiertos:

   a) $\exists\ \mathcal{F}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ "restricción"

   tq si $U \subseteq V \subseteq W$

   $\mathcal{F}(W) \xrightarrow{\mathcal{F}_{W,V}} \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\mathcal{F}_{V,U}} \mathcal{F}(U)$ verifica $\mathcal{F}_{W,V} = \mathcal{F}_{V,U} \circ \mathcal{F}_{W,V}$

   b) $\mathcal{F}_{U,U} = id_{\mathcal{F}(U)}$

En otras palabras, un prehaz es un "functor"

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : \{\text{abiertos de } X\} & \longrightarrow & \{\text{Conjuntos}\} \\ U & \longmapsto & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

Ejemplos ① X esp top.; $A \subseteq X$ subconjunto (más gral: A cualquier conjunto)

Para $U \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(U) := A$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{U,V} : \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ \| & & \| \\ A & & A \\ \ni & & \ni \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad , U \subseteq V$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} = \text{cte} : \{U \subseteq X \text{ abierto}\} & \longrightarrow & \{\text{conjuntos}\} \\ U & \longmapsto & A. \end{array}$$

② X conjunto algebraico$/_{k=\bar{k}}$. Sea $U \subseteq X$ definimos el prehaz

$$\mathcal{O}_X(U) := \{ f : U \to k \ / \ f \text{ regular} \}$$

"f regular": f es localmente $\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ donde $g_1, g_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$, $\deg(g_1) = \deg(g_2)$

(Próxima semana)

Obs: En el ejemplo ②: $\mathcal{O}_X : \{\text{abierto en } X\} \to \{\text{anillos}\}$.

<u>Def</u>: Un pre-haz $\mathcal{F}$ de grupos, anillos, modulos ... etc es un pre-haz tq $\forall U \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(U)$ es un grupo, anillo, modulo, ... etc.

<u>Morfismo de pre-haces</u>

Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dos prehaces en X. Un morfismo de prehaces

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

es definido como: Para $U \subseteq X$ abierto

$$\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

un morfismo, y tal que el diagrama

$$(V \subseteq U) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{U,V}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathcal{G}_{U,V}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

conmuta. (ie: $\mathcal{G}_{U,V} \circ \varphi(U) = \varphi(V) \circ \mathcal{F}_{U,V}$)

<u>Def</u>: Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dos prehaces de grupos en un espacio top X. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces, definimos los prehaces $\ker \varphi$ e $\operatorname{Im} \varphi$ como:

$(\ker \varphi)(U) := \ker \varphi(U)$ e $(\operatorname{Im} \varphi)(U) = \operatorname{Im} \varphi(U)$.

Si $\forall U \subseteq X$ abierto $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ entonces $\mathcal{F}$ es un <u>sub prehaz</u> de $\mathcal{G}$.

Similar: $(\mathcal{G}/\mathcal{F})(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$; $\boxed{s \in \mathcal{F}(U) \text{ es llamada } \underline{\text{sección}}}$

Definimos el <u>tallo</u> de $\mathcal{F}$ en $x \in X$:

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) = \left(\coprod_{x \in U} \mathcal{F}(U) \right) \Big/ \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathcal{F}(U),\ t \in \mathcal{F}(V) \text{ entonces} \\ s = t \text{ en } \mathcal{F}_x \overset{\text{def}}{\iff} \exists W \subseteq U \cap V \\ \text{tq } \mathcal{F}_{U,W}(s) = \mathcal{F}_{V,W}(t) \end{array} \right\}$$

cociente

(c.f. "germen de funciones holomorfas")

Un <u>germen</u> $s_x \in \mathcal{F}_x$ es un par $s_x = (U, s)$, $U \subseteq X$ vecindad de $x \in X$
$s \in \mathcal{F}(U)$

$$(U, s) = (V, t) \iff \exists W \subset U \cap V \text{ tq } s|_W = t|_W$$

<u>Notación</u>: $\pi_x : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$
$\qquad s \longmapsto (U, s) =: s_x$

Def: Un prehaz $\mathcal{F}$ de un espacio topológico X es un haz si:

a) $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto

$s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tq $\mathcal{F}_{\mathcal{U},\mathcal{U}_i}(s) =: s|_{\mathcal{U}_i}$ $\left(\text{aquí: } \mathcal{F}_{\mathcal{U},\mathcal{U}_i} : \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_i) \\ s \mapsto s|_{\mathcal{U}_i} \end{array} \right)$

si $\underset{\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)}{s|_{\mathcal{U}_i}} = 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow s = 0$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U})$

b) si $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ y sea $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tq $s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ $\forall i,j \in I$

"pegar funciones"

$\Rightarrow \exists!\ s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tq $s|_{\mathcal{U}_i} = s_i \quad \forall i \in I$.

No Ejemplo: Sea $\mathcal{F}$ = prehaz cte A en un espacio topológico X.

Sea $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ tq $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$

Sea $s_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_1) = A$, $s_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_2) = A$ tq $s_1 \neq s_2$

$\Rightarrow \nexists\ s \in \underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)}_{=A}$ tq $s|_{\mathcal{U}_1} = s_1$ y $s|_{\mathcal{U}_2} = s_2$.

Ejemplo (próxima semana): $\mathcal{O}_X$ el prehaz de funciones regulares es un haz.

Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ haces y $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces, entonces definimos para $x \in X$:

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathcal{F}_x &\longrightarrow \mathcal{G}_x \\ (\mathcal{U}, s) &\longmapsto (\mathcal{U}, \varphi(\mathcal{U})(s)) \\ \| \quad & \qquad\qquad \| \\ s_x &\longmapsto (\varphi(\mathcal{U})(s))_x \end{aligned}$$

Tarea: Demostrar que φ_x está bien definido.

Prop: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces. Entonces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un isomorfismo $\Leftrightarrow \varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo $\forall x \in X$.

Dem: $(\Rightarrow)$ Sea $x \in X$, $(\varphi_x)^{-1} = (\varphi^{-1})_x$:

$\varphi_x^{-1} \circ \varphi_x (\mathcal{U}, s) = \varphi_x^{-1}(\mathcal{U}, \varphi(\mathcal{U})(s)) = (\mathcal{U}, s)$

($\Leftarrow$) Sup que $\forall x \in X$, $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo.

Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ un abierto. Demostremos que $\varphi(\mathcal{U}) : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ es un isom.

Sean $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tq $\varphi(\mathcal{U})(s_1) = \varphi(\mathcal{U})(s_2)$

Para $x \in \mathcal{U}$:

$$\varphi_x(s_{1,x}) = (\varphi(\mathcal{U})(s))_x = (\varphi(\mathcal{U})(s_2))_x = \varphi_x(s_{2,x})$$

$$\underset{\varphi_x \text{ isom.}}{\Longrightarrow} \quad s_{1,x} = s_{2,x}$$

es decir, $(\mathcal{U}, s_1) = (\mathcal{U}, s_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists W_x \subseteq \mathcal{U}$ tq $s_1|_{W_x} = s_2|_{W_x}$

$\Rightarrow \{W_x\}_{x \in \mathcal{U}}$ cubrimiento de $\mathcal{U}$

$\underset{\mathcal{F}\text{ haz}}{\Longrightarrow} \exists!\ s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tq $s = s_1$, $s = s_2 \Rightarrow s_1 = s_2$ y luego $\varphi(\mathcal{U})$ injectiva

Veamos que $\varphi(\mathcal{U})$ es sobreyectiva:

Sea $t \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$. Encontrar $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tq $\varphi(\mathcal{U})(s) = t$.

Sea $x \in X$: $\exists s_x \in \mathcal{F}_x$ tq $\varphi_x(s_x) = t_x$ (pues φ_x isom.)

donde $t_x = (\mathcal{U}, t) = (V_x, t|_{V_x})$ y $V_x \subseteq \mathcal{U}$ abierto, $x \in V_x$

Entonces $s_x = (V_x, s(x))$ con $s(x) \in \mathcal{F}(V_x)$

En otras palabras: $\varphi_x((V_x, s(x))) = (V_x, t|_{V_x})$

$$\underset{\text{notación}}{\Longleftrightarrow} \Big(\underbrace{\varphi(V_x)(s(x))}_{\in \mathcal{G}(V_x)}\Big)_x = (t|_{V_x})_x = t_x$$

Luego: $\varphi(V_x)(s_x) = t_x$

Para todos $x \in \mathcal{U}$, $\exists V_x \subset \mathcal{U}$ vecindad de x y $s(x) \in \mathcal{F}(V_x)$ tq

$$\begin{aligned} \varphi(V_x) : \mathcal{F}(V_x) &\longrightarrow \mathcal{G}(V_x) \\ s(x) &\longmapsto t|_{V_x} \end{aligned}$$

Entonces $\{V_x\}_{x \in \mathcal{U}}$ es un cubrimiento abierto de $\mathcal{U}$

Sean $x, y \in \mathcal{U}$ tq $x \neq y$:

$$\underset{t|_{V_x \cap V_y}}{\underset{\parallel}{\varphi(V_x \cap V_y)(s(x)|_{V_x \cap V_y})}} = \underset{t|_{V_x \cap V_y}}{\underset{\parallel}{\varphi(V_x \cap V_y)(s(y)|_{V_x \cap V_y})}}$$

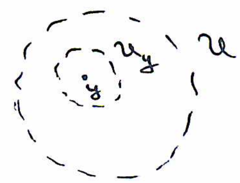
Sabemos que $\varphi(V_x \cap V_y)$ injectivo. $\Rightarrow s(x)|_{V_x \cap V_y} = s(y)|_{V_x \cap V_y}$

$\Rightarrow \exists!\ s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tq $\varphi(\mathcal{U})(s) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{G} \text{ es haz}}}{=} t \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ ∎

<u>Haz asociado a un prehaz</u>:

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz en X. Definimos el prehaz en X como:

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{U}) = \left\{ \sigma : \mathcal{U} \to \coprod_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{F}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall y \in \mathcal{U},\ \exists\, \mathcal{U}_y \ni y \text{ vecindad } y\ \exists\, t \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_y) \\ \text{tq } \sigma(z) = t_z \quad \forall z \in \mathcal{U}_y \end{array} \right\}$$



<u>Ejercicio</u>: Si $\mathcal{F}$ es un haz. El morfismo natural

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$$

inducido por $\varphi(\mathcal{U}) : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}^+(\mathcal{U})$

$$s \longmapsto \left\{ \begin{array}{rcl} \hat{s} : \mathcal{U} & \longrightarrow & \coprod_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{F}_x \\ z & \longmapsto & s_z \end{array} \right\}$$

es un <u>isomorfismo</u>. (Idea: $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}^+_x \quad \forall x \in X$)

<u>Ejercicio</u>: ¿Qué es $\mathcal{F}^+$ si $\mathcal{F}$ es el haz constante? (Resp: "funciones <u>localmente</u> constantes")

<u>Proposición</u>: Sea $\mathcal{F}$ un pre-haz en X. Entonces $\mathcal{F}^+$ es un haz.

<u>Dem</u> (idea): Definimos el espacio topológico (étalé):

$$\text{Ét}(\mathcal{F}) = \coprod_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{F}_x$$

Con abiertos de la forma $\mathcal{B}(\mathcal{U},s) := \{ s_x \in \mathcal{F}_x \mid x \in \mathcal{U} \}$ donde $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

<u>Tarea</u>: Los abiertos de la forma $\mathcal{B}(\mathcal{U},s)$ forman una base para $\text{Ét}(\mathcal{F})$.

Observemos que la proyección

$$\begin{array}{rcl} p : \text{Ét}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & X \\ (x, (\mathcal{U},s)) & \longmapsto & x \end{array}$$

es un homeomorfismo local: $p|_{\mathcal{B}(\mathcal{U},s)} : \mathcal{B}(\mathcal{U},s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ homeo.

y $p \circ \sigma = id_{\mathcal{U}}$

$\Rightarrow \sigma \in \mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ vista como $\sigma : \mathcal{U} \to \text{Ét}(\mathcal{F})$ es una función continua.

Luego: $\mathcal{F}^+(\mathcal{U}) = \left\{ \sigma : \mathcal{U} \to \underset{\substack{\downarrow \\ X}}{\text{Ét}(\mathcal{F})} \text{ tq } p\circ\sigma = id_{\mathcal{U}} \right\}$

Teorema (Tarea): Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ un homeo local entre esp. top X e Y.
Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ definimos

$$\Gamma_\pi(\mathcal{U}) = \{ s : \mathcal{U} \to Y \mid s \text{ es continua y } \pi \circ s = id_{\mathcal{U}} \}$$

$\Rightarrow \Gamma_\pi$ es un haz en X

Por el teorema: $\mathcal{F}^+$ es un haz ■

Propiedad universal: Si $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de prehaces y $\mathcal{G}$ un haz
$\Rightarrow \exists!$ morfismo $\mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tq

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", near start] & \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r, dashed] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

conmutativo.