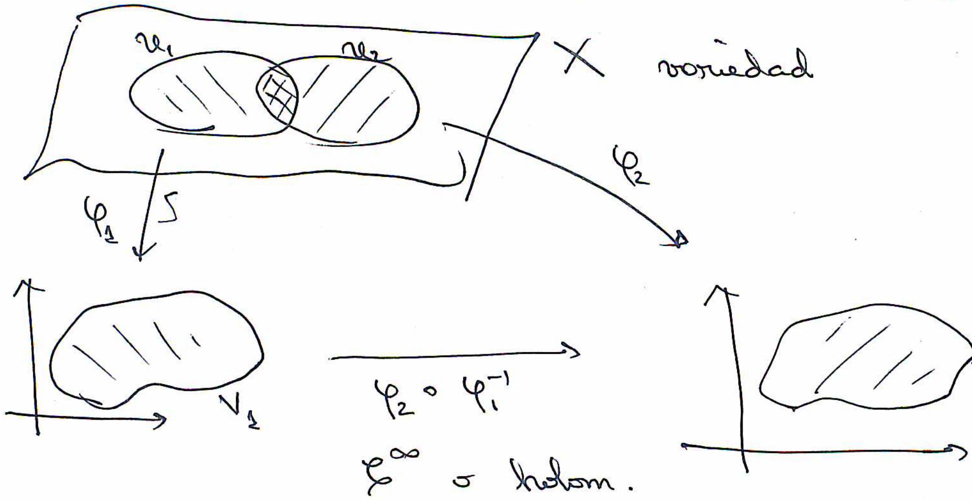
Geometría Algebraica (Semana 1):

§1. Introducción: En geom. diferencial o compleja:



$V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ abierto

Además: $\exists$ coord $x_1, \dots, x_n$: $\varphi_{\mathcal{U}}(a) = (x_1(a), \dots, x_n(a))$, $a \in X$

"haz"

x_i $\mathcal{C}^\infty$ o holo.

$\Rightarrow$ Si conocemos $\mathcal{O}(\mathcal{U}) = \{$funciones $\mathcal{C}^\infty$/holo en $\mathcal{U}\}$ obtenemos X.

Geom. algebraica: Reemplazar $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ por un cuerpo k

Localmente X variedad alg: $\mathcal{U} = \{f_1 = \dots = f_r = 0\} \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ $(= k^n)$

polinomios

$\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathcal{U}) \cong k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$ $\leftarrow$ "haz"

Cambio de cartas?

§2. Dos teoremas de Hilbert:

1) Teorema de la base de Hilbert:

Recuerdo: Sea A anillo (abeliano con $1 \in A$). Decimos que A es noetheriano si para toda cadena de ideales en A

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq \dots$$

$\exists\, n \geq 1$ tq $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$ (ACC) "Ascending Chain Condition"

Ej: Un cuerpo es noetheriano

Teorema (Hilbert, 1890): A noeth $\Rightarrow$ $A[x]$ noeth.

Dem: Sup. que $\exists\, I \subseteq A[x]$ no finitamente gen. ($\Rightarrow I \neq \langle 0 \rangle$).

$\forall i \geq 1$ sea $f_i \in I - I_{i-1}$ de grado d_i minimal y sea $I_i = \langle f_1, \dots, f_i \rangle$. Sea c_i el coeficiente principal de f_i y definamos $\mathfrak{a} = \langle \{c_i\}_{i \geq 1} \rangle \subseteq A$ ideal.

A noeth $\Rightarrow \mathfrak{a} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ para cierto n.

Luego, $c_{n+1} = a_1 c_1 + \dots + a_n c_n$ con $a_i \in A$.

Observar que $d_i \leq d_{i+1}$.

Sea $f := f_{n+1} - (a_1 f_1 x^{d_{n+1}-d_1} + \dots + a_n f_n x^{d_{n+1}-d_n}) \in I$

$$= (\cancel{c_{n+1}} x^{d_{n+1}} + \dots) - ((\underbrace{\cancel{a_1 c_1 + \dots + a_n c_n}}_{c_{n+1}}) x^{d_{n+1}} + \dots)$$

$\Rightarrow \deg(f) < d_{n+1} \Rightarrow f \in I_n \Rightarrow f_{n+1} \in I_n$, contradicción ■

Consecuencia: Si k cuerpo, $k[x_1, \dots, x_n]$ es noetheriano. En part, todo ideal $I = (f_1, \dots, f_r)$ fin. gen.

2) Hilbert's Nullstellensatz (teorema de los ceros de Hilbert):

Recuerdo: Una extensión de cuerpos $k < K$ es algebraica si todo $a \in K$ es raíz de algún polinomio $P \in k[x] \setminus \{0\}$. Si $k < K$ no es algebraica decimos que es trascendente
(e.g. $\mathbb{R} < \mathbb{C}$ y $\mathbb{Q} < \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ algebraicas; $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ trascendente)

Lema: Sea k cuerpo y K extensión de k fin. gen. como k-álgebra
$\Rightarrow k < K$ algebraica

Idea: Si k infinito y $K = k(x)$ extensión trasc. (caso general parecido)
Si $f_1, \dots, f_m \in K$ conjunto finito, entonces vamos a probar que
$A = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{k\text{-alg}} \subsetneq K$ (contradicción).
Elegir $c \in k$ diferente de los polos de $f_1, \dots, f_m$. Luego, todo $f \in A$ no tiene polos en c y en particular $\frac{1}{x-c} \notin A$ ■

Teorema (Nullstellensatz débil): Sea $k = \bar{k}$ alg cerrado (eg. $\mathbb{C}, \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{F}_p}, \overline{\mathbb{Q}}$)
Entonces todo $\mathfrak{m} \subseteq A = k[x_1, \dots, x_n]$ ideal maximal es de la forma $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ para ciertos $a_1, \dots, a_n \in k$. En part, una familia $\{f_i\}_{i \in I}$ de polinomios sin ceros comunes en k^n genera $\langle \{f_i\}_{i \in I} \rangle = A$

Dem: Sea $\mathfrak{m} \subseteq A$ maximal $\Rightarrow K = A/\mathfrak{m}$ cuerpo, fin. gen. como k-alg.
Lema $\Rightarrow k < K$ algebraica $\underset{k = \bar{k}}{\Longrightarrow} K \cong k$.
Luego, cada $x_i \in A$ es enviado a cierto $a_i \in k$ vía $A \to A/\mathfrak{m}$
$\Rightarrow \underbrace{\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle}_{\text{maximal}} \subseteq \mathfrak{m} \Longrightarrow \mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$.

Finalmente, sea $I = \langle \{f_i\}_{i \in I} \rangle$. Si $I \subsetneq A$ entonces $\exists\, \mathfrak{m}$ maximal tq $I \subseteq \mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_1 - a_n \rangle \Rightarrow$ todos los $f \in I$ se anulan en $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$, contradicción ■

Teorema (Nullstellensatz, Hilbert (1893)): Sea $k = \bar{k}$, y sean g y $f_1, \dots, f_m$ en $k[x_1, \dots, x_n]$ vistos como funciones en k^n. Sea
$$V(f_1, \dots, f_m) := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f_1(a) = \dots = f_m(a) = 0\}.$$
Si $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $(a_1, \dots, a_n) \in V(f_1, \dots, f_m)$, entonces existe $N \geq 1$ tq $g^N \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$.

Dem: Truco de Rabinowisch (1929): Introducir una nueva variable x_{n+1}:
Los polinomios $f_1, \dots, f_m$ y $x_{n+1} g - 1$ no tienen ceros comunes en k^{n+1}
Nullstellensatz débil $\Rightarrow \langle f_1, \dots, f_m, x_{n+1} g - 1 \rangle = k[x_1, \dots, x_{n+1}] = \langle 1 \rangle$
$\Rightarrow \exists\, p_1, \dots, p_{m+1} \in k[x_1, \dots, x_{n+1}]$ tq
$$1 = p_1 f_1 + \dots + p_m f_m + p_{m+1} \cdot (x_{n+1} g - 1)$$
Tomando la imagen de la ecuación por el homom. $k[x_1, \dots, x_{n+1}] \to k(x_1, \dots, x_n)$, $x_{n+1} \mapsto \frac{1}{g}$

Obtenemos $1 = p_1(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{g}) f_1 + \dots + p_m(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{g}) f_m$
Multiplicamos por una potencia g^N adecuada y obtenemos $g^N \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ ∎

§3. Topología de Zariski: Sea $k = \bar{k}$.
Dotaremos a k^n de una topología (de Zariski) y de un "haz" en k-algebras ("funciones regulares") $\rightsquigarrow$ "espacio anillado" $\mathbb{A}^n$ (espacio afín)
En lo que sigue: $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(k) = k^n$ y $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[x_1, \dots, x_n] = A$

Def: Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ familia de polinomios. El conjunto
$$V(S) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall f \in S\}$$
es llamado un cerrado algebraico o sub-variedad afín de $\mathbb{A}^n$

Obs: $V(S) = V(\langle S \rangle) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base de Hilbert}}}{=} V(f_1, \dots, f_m)$ para ciertos $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

Notación: $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal $\rightsquigarrow V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$
Obs: Si $S' \subseteq S \Rightarrow V(S) \subseteq V(S')$ ("más ecuaciones, más restricciones) $\to$ menos puntos")
La aplicación I (ideal) $\mapsto V(I)$ es "decreciente".
Ejemplos: 1) $V(1) = \emptyset$, $V(\emptyset) = V(0) = \mathbb{A}^n$ son sub-var. afines.
2) $V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ (punto) sub-var.
3) En $\mathbb{A}^2_{(x,y)}$: $V(x^2) = V(x)$ (eje y) ☹ (solución: esquemas)

Prop: a) Toda intersección de sub-var afines de $\mathbb{A}^n$ es sub-var afín.
b) Unión finita de sub-var afines de $\mathbb{A}^n$ es sub-var afín.

Dem: a) $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$

b) Basta: $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$

productos $s_1 s_2$, $s_i \in S_i$

Si $a \notin V(S_1) \cup V(S_2)$, $\exists F_1 \in S_1$ y $F_2 \in S_2$ tq $F_1(a) \neq 0$ y $F_2(a) \neq$
$\Rightarrow (F_1 F_2)(a) \neq 0 \Rightarrow a \notin V(S_1 S_2)$ ∎

Obs: Todo conj finito de $\mathbb{A}^n$ es una subvar afín.

Los conjuntos $V(S)$ definen una topología en $\mathbb{A}^n$: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^n$ es un abierto Zariski si $\mathcal{U} = \mathbb{A}^n \setminus V(S)$ para algún $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

(ie: cerrados son ceros comunes de polinomios y abiertos sus complementos)

⚠ k infinito $\Rightarrow$ $\forall\, \mathcal{U}, V$ abiertos Zariski $\neq \emptyset$, $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$

Ej: En $\mathbb{A}^1$ los cerrados son $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ y los conjuntos finitos.

Convención: Dotamos a toda subvar afín de $\mathbb{A}^n$ de la topología inducida por la topología de Zariski de $\mathbb{A}^n$.